

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MODÉLISATION DE LA DÉPENDANCE DYNAMIQUE EN TARIFICATION
ET EN GESTION DES RISQUES FINANCIERS SOUS MODÈLES GARCH

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ABDOULAYE SONKO

JUIN 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche le professeur Alexandru Mircea Badescu pour ses nombreux conseils et sa disponibilité sans lesquels ce projet de maîtrise aurait été difficilement réalisable et de m'avoir permis d'acquérir des expériences en enseignement en tant que démonstrateur du cours de la théorie de crédibilité. Je remercie les professeurs René Ferland et François Watier pour l'examen de mon travail. Mes remerciements vont à l'ensemble des professeurs et professeures du département de mathématiques de l'UQAM pour leurs conseils et leur devouement pour un enseignement de qualité dans le domaine actuariel et financier. Je remercie également le professeur Mathieu Pigeon pour la confiance qu'il m'a accordée en tant que démonstrateur du cours d'assurance IARD : tarification et évaluation, ce qui m'a permis d'apprendre davantage sur les outils de la tarification en IARD et qui a aussi constitué une source de financement pour ma maîtrise. Je remercie tous les chargés de cours avec lesquels j'ai pu collaborer en tant que démonstrateur : Dany Pilon, Ziad Semaan, Amadou Diogo Barry et Oscar Alberto Quijano Xacur. Je tiens aussi à remercier mon collègue Mohamed Amine Lkabous doctorant en mathématiques pour tout le soutien qu'il m'a apporté pendant la réalisation du projet de maîtrise. Je tiens à remercier tout le personnel technique et administratif du département de mathématiques et particulièrement madame Gisèle Legault, analyste de l'informatique et madame Isabella Couture, agente de gestion des études de cycles supérieurs, pour leur disponibilité et l'accueil qu'ils m'ont réservé au cours de ma maîtrise.

DÉDICACE

À mes parents, à mes amis
et à tous mes soutiens pour
la confiance et leur présence
à mes côtés dans des moments
difficiles.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xiii
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
MODÈLES GARCH UNIVARIÉS	5
1.1 Généralités	5
1.2 GARCH(p,q)	7
1.2.1 Propriétés des modèles GARCH(p,q)	8
1.2.2 Estimation et propriétés asymptotiques	10
1.2.3 Quelques familles de modèles GARCH univariés	11
1.3 Tarification sous modèle GARCH (1,1)	12
CHAPITRE II	
INTRODUCTION À LA THÉORIE DES COPULES	15
2.1 Définitions	15
2.2 Propriétés	16
2.3 Exemples de familles de copules	18
2.3.1 Famille archimédienne	18
2.3.2 Famille elliptique	21
2.4 Concept et mesures de dépendance	21
2.4.1 Corrélation de Pearson	22
2.4.2 Tau de Kendall	23
2.4.3 Rho de Spearman	23
2.4.4 Coefficient de dépendance de queue	24

2.5	Méthodes d'inférence	25
2.5.1	Méthode des moments	26
2.5.2	Maximum de vraisemblance exacte	26
2.5.3	Inférence sur les marginales	27
2.6	Méthodes de simulation	28
2.6.1	Cas général	28
2.6.2	Copule archimédienne	28
2.6.3	Cas spécial : copule normale	28
CHAPITRE III		
	MODÈLES DCC-GARCH	31
3.1	Présentation du modèle de Engle (2002)	32
3.1.1	CCC-GARCH de Bollerslev 1990	32
3.1.2	DCC-GARCH de Engle 2002	33
3.2	Estimation	34
3.3	Propriétés asymptotiques	37
3.4	Analyse des corrélations des indices boursiers	38
CHAPITRE IV		
	DÉPENDANCE DYNAMIQUE EN TARIFICATION DES PRODUITS DÉ- RIVÉS VIA MODÈLES GARCH	45
4.1	Méthodes d'estimation du paramètre de dépendance statique	46
4.1.1	Méthode du maximum de vraisemblance	47
4.1.2	Méthode d'inversion du tau de Kendall	48
4.2	Méthode d'estimation du paramètre de dépendance dynamique	49
4.2.1	Tau de Kendall conditionnel dynamique	49
4.3	Tarification des options bivariées	53
4.3.1	Approche copule-GARCH	56
4.3.2	Approche DCC-GARCH	57
4.3.3	Approche mixte : copule-CCC/DCC-GARCH	59

4.3.4 Résultats numériques et commentaires	62
CHAPITRE V	
MODÉLISATION DES MESURES DE RISQUE DYNAMIQUES AVEC MODÈLES GARCH	69
5.1 Coefficient bêta	69
5.1.1 Définitions et généralités	69
5.1.2 Bêta conditionnel dynamique	71
5.2 Analyses du coefficient bêta	73
5.2.1 Analyse du bêta de l'action de Boeing sur l'indice NYSE . . .	75
5.3 VaR et TVaR conditionnelles dynamiques	78
5.3.1 Définitions et propriétés	78
5.3.2 Gestion des risques du portefeuille	79
5.3.3 Exemples numériques et interprétation des résultats	81
CONCLUSION	87
APPENDICE A	
PREUVE DU THÉORÈME DE DUAN	91
APPENDICE B	
DESCRIPTION ET EXEMPLES DES COPULES DE DIMENSION 2 . .	93
APPENDICE C	
MÉTHODE DE CHOLESKY	97
RÉFÉRENCES	99

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Exemples de familles GARCH (1,1).	12
1.2 Exemples de distributions pour l'innovation z_t	12
2.1 Exemples de coefficients de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et Normale.	25
3.1 Corrélations constantes des rendements entre NYSE, NASDAQ et S&P500 du 03/01/2000 au 08/12/2014.	41
3.2 Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NYSE-NASDAQ.	41
3.3 Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NYSE-SP500.	42
3.4 Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NASDAQ-SP500.	43
4.1 Estimation du paramètre de dépendance statique associé aux copules : Clayton, Gumbel et normale pour les données NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.	48
4.2 Estimation du tau de Kendall conditionnel dynamique à partir des observations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014 selon les différentes approches.	51
4.3 Moyenne du paramètre θ_t conditionnel dynamique à partir des observations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.	51
4.4 Les paramètres GARCH(1,1) associés aux indices NYSE et NASDAQ sous l'approche de Duan (1995).	64
4.5 Les paramètres CCC et DCC associés aux indices NYSE et NASDAQ au sens de Bollerslev (1990) et Engle (2002).	64

4.6	Sommaire de modèles GARCH bivariés.	65
4.7	Prix des options bivariées échéance de 20 jours.	66
4.8	Prix des options bivariées échéance de 30 jours.	67
5.1	Estimation du bêta journalier et intervalle de confiance à 95% par la méthode de régression de la compagnie Boeing sur l'indice NYSE.	77
5.2	Statistiques du bêta conditionnel journalier de la compagnie Boeing sur l'indice NYSE du 10/12/2013 au 08/12/2014.	77
5.3	Probabilité de perte de plus de $\alpha\%$ de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).	83
5.4	Valeur à risque (Value-at-Risk) sur la perte en pourcentage de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).	84
5.5	« Tail Value-at-Risk » sur la perte en pourcentage de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).	85
B.1	Fonction de répartition pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.	93
B.2	Fonction de densité pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.	93
B.3	Espace de paramètre θ pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.	94
B.4	Tau de Kendall pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.	94
B.5	Générateur pour les copules : Clayton et Gumbel.	94
B.6	Fonction de Kendall pour les copules : Clayton et Gumbel.	95
B.7	Coefficient de dépendance de queue (inférieure et supérieure) pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.	95

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1 Copule de Clayton et ses lignes de niveau pour $\theta = 3$	20
2.2 Copule de Gumbel et ses lignes de niveau pour $\theta = 3$	20
2.3 Copule normale et ses lignes de niveau pour $\theta = 0.8$	21
2.4 Coefficient de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et normale de paramètres respectivement 1, 1.5 et 0.5.	25
3.1 Prix des indices boursiers : NYSE, NASDAQ et S&P500 du 03/01/2000 au 08/12/2014.	39
3.2 Corrélations conditionnelles : NYSE-NASDAQ.	40
3.3 Corrélations conditionnelles : NYSE-S&P500.	40
3.4 Corrélations conditionnelles : NASDAQ-S&P500.	40
4.1 Variance conditionnelle sous le modèle GARCH(1,1) : NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.	46
4.2 Dépendance positive entre NYSE et NASDAQ illustrée par les in- novations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.	46
4.3 Tau de Kendall dynamique entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche de van den Goorbergh <i>et al.</i> (2005).	52
4.4 Tau de Kendall dynamique entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.	52
4.5 Paramètre θ_t de dépendance pour la copule Clayton entre NYSE- NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.	53
4.6 Paramètre θ_t de dépendance pour la copule Gumbel entre NYSE- NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.	53

4.7	Paramètre θ_t de dépendance pour la copule normale entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.	54
4.8	Prix de l'option de vente (put) d'échéance 30 jours en fonction du prix d'exercice sous différentes approches de dépendance.	68
4.9	Prix de l'option d'achat (call) d'échéance 30 jours en fonction du prix d'exercice sous différentes approches de dépendance.	68
5.1	Bêta CCC-GARCH : Boeing vs NYSE	76
5.2	Bêta DCC-GARCH : Boeing vs NYSE	76
5.3	Bêta copule normale CCC/DCC GARCH : Boeing vs NYSE . . .	76
5.4	Bêta copule de Clayton CCC/DCC GARCH : Boeing vs NYSE .	76
5.5	Bêta copule de Gumbel CCC/DCC GARCH : Boeing vs NYSE .	76

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude de la modélisation de la dépendance dynamique en tarification et en gestion des risques sous modèles GARCH. En effet, la problématique est de concilier à la fois les théories statistiques à travers les copules et les innovations en modélisation financière via les modèles GARCH. Dans cette optique, nous étudions une approche dynamique de la modélisation du paramètre de la dépendance via le tau de Kendall et la comparons à la dépendance statique ainsi qu'à la corrélation conditionnelle dynamique. Ainsi, la tarification des options du type exotique et les outils de gestion des risques à l'instar du coefficient bêta du modèle CAPM (Capital Asset Pricing Model), la valeur à risque (Value-at-Risk : VaR) et la TVaR (Tail-VaR) sont aussi étudiés sous l'hypothèse de la dépendance.

Mots-clés : GARCH, corrélation conditionnelle dynamique, copule, call, put, coefficient bêta, VaR, TVaR.

INTRODUCTION

La modélisation de la variance conditionnelle a conduit à un changement fondamental dans les approches utilisées en finance pour tenir compte des faits stylisés dans les séries financières depuis les travaux de Engle (1982) avec le modèle ARCH ainsi que sa généralisation par Bollerslev (1986). Ainsi, ce concept introduit déjà une dépendance temporelle dans la modélisation de la variance conditionnelle qui est plus proche de la réalité en ce qui à trait au comportement des séries financières sur une longue période comme l'ont étudié Ding et Granger (1996). Les portefeuilles en finance sont généralement constitués de plusieurs actifs. Les études empiriques montrent que ces actifs peuvent être corrélés (dépendance linéaire) ou dépendants au sens fort (par le biais des copules). Dans ce mémoire, d'une part, il sera question d'évaluer des options exotiques dont la recette (payoff) fait intervenir plusieurs actifs financiers et dont le prix pourrait être affecté par différentes formes de dépendance, soit par la corrélation conditionnelle constante et dynamique (voir Engle (2002); Engle (2009); Rombouts *et al.* (2014)) ou soit par les copules statiques ou dynamiques (voir van den Goorbergh *et al.* (2005); Patton (2006); Patton (2012); Patton (2013); Zhang et Guégan (2008); Dias et Embrechts (2010); Chiou et Tsay (2008)). D'autre part, nous évaluerons les outils de mesure de risque sous l'hypothèse de la dépendance statique et dynamique par le biais des modèles GARCH.

Dans l'évaluation des options, nous allons supposer que la dynamique des prix des actifs suit un modèle GARCH, une approche introduite par Duan (1995) et également étudiée par Badescu *et al.* (2008); Badescu *et al.* (2011). Cette

approche est une solution de remplacement à la dynamique en temps continu des prix proposée par Black et Scholes (1973).

Le premier chapitre de ce mémoire est une introduction aux modèles GARCH univariés où nous étudions le concept de base pour la modélisation des séries financières développé par Bollerslev *et al.* (2010); Tsay (2010); Francq et Zakoïan (2010). Nous étudions les propriétés théoriques reliées à l'estimation des paramètres et à la stationnarité des processus GARCH proposées par Bougerol et Picard (1992) (voir Andersen *et al.* (2009)). Nous étudions l'approche de la tarification des options sous les modèles GARCH univariés introduite par Duan (1995).

Le deuxième chapitre se veut une introduction à la théorie des copules développée par Nelsen (2006) et Joe (1997). Ce chapitre permet de développer le concept de dépendance par le biais des copules, on y présente des exemples de familles de copules à deux dimensions, les méthodes de simulation et les méthodes d'inférence notamment étudiées par Embrechts *et al.* (2003); Balakrishnan et Lai (2009) et Joe (1993).

Dans le troisième chapitre, nous étudions le modèle DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation GARCH) introduit par Engle (2002). Ce modèle est une extension du modèle GARCH univarié qui introduit la corrélation conditionnelle entre plusieurs actifs financiers dont les dynamiques individuelles suivent des modèles GARCH. La méthode d'estimation et les propriétés asymptotiques du modèle DCC-GARCH y sont étudiées selon l'approche de Engle (2009); Engle et Sheppard (2005).

Le quatrième chapitre traite de la tarification des options exotiques sous les modèles GARCH où nous définissons le concept de dépendance statique et dynamique via la modélisation du Tau de Kendall (voir van den Goorbergh *et al.* (2005) et

Patton (2006)). Cependant, un concept mixte alliant la dépendance au sens des copules et la corrélation conditionnelle est introduit et nous l'utilisons pour développer une extension du modèle DCC-GARCH proposé par Engle (2002). Des exemples numériques basés sur la simulation sont étudiés afin de comparer les prix des options pour différents types de dépendance.

Le cinquième chapitre expose le problème de gestion des risques dans le cadre d'un portefeuille dynamique. Les principales propriétés d'une mesure cohérente de risque selon Artzner *et al.* (1999) seront présentées. Ainsi, les outils de mesure de risque à l'instar du coefficient bêta (voir Engle (2009) ; Cougnaud (2007) ; Adrian et Franzoni (2009)), de la VaR et de la TVaR (voir Marceau (2013) ; Andersen *et al.* (2009)), sous modèles GARCH sont étudiés à travers les concepts de dépendance statique et dynamique introduits dans les chapitres 2, 3 et 4. Nous introduisons une extension du coefficient bêta conditionnel étudié par Engle (2009). Nous étudions un modèle d'évaluation de portefeuille sous modèles GARCH afin de quantifier les risques financiers (voir Haugh (2004) ; Chiou et Tsay (2008)) sous l'influence de la dépendance statique et dynamique.

CHAPITRE I

MODÈLES GARCH UNIVARIÉS

1.1 Généralités

Dans le présent chapitre, on va étudier une classe de modèles économétriques dite GARCH : «Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic» (processus conditionnellement hétéroscédastiques) (voir Engle (1982); Bollerslev (1986); Andersen *et al.* (2009); Francq et Zakoïan (2010)) ainsi que leurs applications en finance (voir Duan (1995); Badescu *et al.* (2008); Badescu *et al.* (2011); Tsay (2010)). En effet, les acteurs financiers sont préoccupés par la modélisation de la volatilité associée aux rendements financiers. D'une part, il est maintenant connu que la volatilité des rendements financiers fluctue au cours du temps et que les caractéristiques particulières des séries financières (non stationnarité, regroupement des extrêmes, normalité des rendements, faits stylisés etc.) font qu'il est difficile de modéliser les séries financières. D'autre part, la tarification sous le modèle de Black-Scholes suppose que la volatilité des rendements est constante au cours du temps ce qui est contraire aux observations empiriques. Par conséquent, les modèles de type ARMA : «AutoRegressive Moving Avarage» (modèles autorégressifs avec moyennes mobiles) (voir Brockwell et Davis (2002)) sont inadaptés pour modéliser la volatilité, car ils sont centrés sur l'analyse des autocovariances des processus. Afin de prendre en compte les caractéristiques des séries financières,

les rendements y_t sont généralement modélisés sous la forme multiplicative :

$$y_t - \mu_t = \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad (1.1)$$

où y_t est la série des rendements observés, $\mu_t = E_{t-1}[y_t]$ est l'espérance conditionnelle de y_t par rapport à la tribu \mathcal{F}_{t-1} et z_t est un processus indépendant et identiquement distribué, centré, de variance unité. Le processus σ_t est appelé volatilité. On a :

- (i) σ_t est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{F}_{t-1} ;
- (ii) z_t est indépendant de \mathcal{F}_{t-1} ;
- (iii) $\sigma_t > 0$.

Engle (1982) suppose que $\mu_t = 0$ et que ϵ_t se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim D(0, 1), \\ \sigma_t^2 &= Var_{t-1}(\epsilon_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q-1$ et $\alpha_q > 0$. On dit que $\epsilon_t \sim ARCH(q)$.

Remarque 1.1 :

Premièrement, l'espérance non conditionnelle de ϵ_t est nulle. En effet,

$$E[\epsilon_t] = E[E_{t-1}[\epsilon_t]] = E[\sigma_t E_{t-1}[z_t]] = 0.$$

Deuxièmement, le processus ϵ_t est un bruit blanc, car

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0, \quad \forall t, h > 0.$$

Troisièmement, la variance non conditionnelle de ϵ_t peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} Var(\epsilon_t) &= E[\epsilon_t^2] = E[E_{t-1}[\epsilon_t^2]] \\ &= E\left[\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2\right] \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j E[\epsilon_{t-j}^2]. \end{aligned}$$

Comme ϵ_t est un bruit blanc, $E[\epsilon_t] = 0$ et $Var(\epsilon_t) = Var(\epsilon_{t-j}) = E[\epsilon_{t-j}^2]$. Il en résulte que :

$$Var(\epsilon_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Var(\epsilon_{t-j}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Var(\epsilon_t),$$

c'est-à-dire que :

$$Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j}.$$

On en déduit que, comme $Var(\epsilon_t) > 0$, alors $0 \leq \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$.

Cependant, le modèle ARCH(q) introduit par Engle (1982) souffre de quelques faiblesses (voir Tsay (2010)) :

1. le modèle ARCH suppose que les chocs ϵ_t positifs et négatifs ont les mêmes effets sur la volatilité, car elle dépend du carré ϵ_{t-1}^2 des chocs précédents. Or, en pratique, les observations empiriques montrent que le prix d'un actif financier réagit différemment aux chocs positifs et négatifs ;
2. le modèle ARCH n'indique pas les sources de variations dans les séries financières. Il permet juste de décrire le comportement mécanique de la variance conditionnelle ;
3. le modèle ARCH peut conduire à une surestimation de la volatilité, car il réagit très lentement face aux chocs isolés.

1.2 GARCH(p,q)

La généralisation du modèle ARCH introduit par Engle (1982) est due à Bollerslev (1986) pour corriger les faiblesses du modèle ARCH.

Définition 1.1 On dit que ϵ_t est un processus GARCH(p,q) si ses deux premiers moments existent et vérifient :

$$(i) \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim D(0, 1);$$

(ii) il existe des constantes $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ telles que :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (1.3)$$

1.2.1 Propriétés des modèles GARCH(p,q)

Les séries de rendements financiers à haute fréquence constituent le principal domaine d'applications des modèles GARCH (voir Hautsch (2012)). Ces séries présentent généralement un coefficient d'aplatissement assez élevé et les autocorrélations des rendements sont très faibles contrairement aux autocorrélations des valeurs absolues et des carrés des rendements qui sont plus élevées (voir Ding et Granger (1996)). De plus, la variance des rendements à l'instant t , conditionnellement à l'information disponible à l'instant $t-1$, n'est pas constante. L'équation (1.3) montre bien qu'une forte valeur de σ_{t-1}^2 semble augmenter la probabilité d'observer une forte valeur de σ_t^2 : propriété dite de regroupement de volatilité.

Pour mettre en évidence d'autres propriétés des modèles GARCH (voir Francq et Zakoïan (2010); Tsay (2010)), posons $\eta_t = \epsilon_{t-1}^2 - \sigma_t^2$ et observons que l'équation (1.3) devient :

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) \epsilon_{t-j}^2 + \eta_t - \sum_{i=1}^p \beta_i \eta_{t-i}. \quad (1.4)$$

On reconnaît que l'équation (1.4) représente une structure d'un modèle ARMA(max(p,q),q) pour ϵ_t^2 . En remarquant que $E[\eta_t] = E[\epsilon_{t-1}^2 - \sigma_t^2] = 0$, la variance non conditionnelle de ϵ_t est donc donnée par :

$$Var(\epsilon_t) = E[\epsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j)}.$$

D'où les contraintes sur les paramètres, c'est-à-dire $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\alpha_j + \beta_j) < 1$. En particulier, lorsque $p = q = 1$, on obtient que

$\epsilon_t \sim GARCH(1,1)$ si et seulement si $\epsilon_t^2 \sim ARMA(1,1)$ et l'équation (1.3) se réduit à :

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim D(0,1), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,\end{aligned}\tag{1.5}$$

où $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ et $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$. On tire que, la variance non conditionnelle pour GARCH(1,1) est donnée par $Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$.

À présent, nous nous intéressons à l'une des propriétés des modèles GARCH : la stationnarité. Sans perte de généralité, on considère un modèle GARCH(1,1). On a :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + a(z_{t-1}) \sigma_{t-1}^2 \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} [a(z_{t-1}) \dots a(z_{t-i})]\right) \alpha_0,\end{aligned}\tag{1.6}$$

avec $a(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^2 + \beta_1$. On a les théorèmes suivants dont les preuves se trouvent dans Francq et Zakoïan (2010) pages 25-26 et 27-28 respectivement :

Théorème 1.1 *Stationnarité au sens strict pour $\epsilon_t \sim GARCH(1,1)$:*

— si

$$-\infty \leq \Gamma := E [\log (\alpha_1 z_t^2 + \beta_1)] < 0\tag{1.7}$$

alors la série

$$\sigma_t^2 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} [a(z_{t-1}) \dots a(z_{t-i})]\right) \alpha_0\tag{1.8}$$

converge presque sûrement et le processus $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ est l'unique solution strictement stationnaire pour le modèle défini par l'équation (1.5) ;

— si $\Gamma \geq 0$ et $\alpha_0 > 0$, il n'existe pas de solution strictement stationnaire.

Remarque 1.2 *L théorème 1.1 a deux conséquences utiles :*

(i) si l'équation (1.7) est satisfaite alors $\beta_1 < 1$. Réciproquement, si

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1,$$

alors la condition (1.7) est vérifiée. En effet, par l'inégalité de Jensen on a :

$$E[\log a(z_t)] \leq \log E[a(z_t)] = \log(\alpha_1 + \beta_1) < 0;$$

(ii) si $\alpha_0 = 0$ et $\Gamma < 0$, alors $\epsilon_t \equiv 0$ est la seule solution stationnaire strictement stationnaire. Par conséquent, la contrainte sur $\alpha_0 > 0$ est nécessaire.

Théorème 1.2 Stationnarité au second ordre pour $\epsilon_t \sim GARCH(1,1)$. On suppose que $\alpha_0 > 0$:

- si $\alpha_1 + \beta_1 \geq 1$, alors il n'existe pas de solution stationnaire au second ordre ;
- si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, le processus ϵ_t défini à partir de (1.5) est stationnaire au second ordre.

La stationnarité pour GARCH(p,q) est établie par Bougerol et Picard (1992), pour plus de détails (voir Andersen *et al.* (2009) ; Francq et Zakoïan (2010)).

1.2.2 Estimation et propriétés asymptotiques

On considère le modèle GARCH(p,q) tel que défini par (1.3). Les résultats suivants sont établis dans Andersen *et al.* (2009) ; Francq et Zakoïan (2010).

Étant donné des valeurs initiales $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{1-q}$ et $\tilde{\sigma}_0^2, \dots, \tilde{\sigma}_{1-p}^2$, on pose :

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \tilde{\beta}_i \tilde{\sigma}_{t-i}^2,$$

pour $t = 1, \dots, T$ où $\tilde{\sigma}_t^2$ est une approximation de σ_t^2 et

$$\theta = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_q, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p)'$$

On note par $\Theta \subset]0, +\infty[\times]0, +\infty[^{p+q}$ le support des paramètres et par

$$\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)'$$

le «vrai» paramètre inconnu.

La quasi-vraisemblance gaussienne pour les observations $\epsilon_1, \dots, \epsilon_T$ est donnée par :

$$\tilde{L}_T(\theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right). \quad (1.9)$$

L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour θ_0 est donné par :

$$\hat{\theta}_T^{QMV} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \tilde{L}_T(\theta), \quad \theta \in \Theta. \quad (1.10)$$

Sous certaines conditions de régularité et de stationnarité, on a la convergence asymptotique de $\hat{\theta}_T^{QMV}$:

$$\hat{\theta}_T^{QMV} \rightarrow \theta_0, \quad T \rightarrow +\infty. \quad (1.11)$$

1.2.3 Quelques familles de modèles GARCH univariés

La littérature économétrique autour des modèles GARCH est très vaste, et ce, depuis les contributions de Engle (1982) et de Bollerslev (1986). Et, la liste de modèles que nous présentons (voir tableau 1.1) est loin d'être exhaustive. Cependant, un lecteur intéressé peut consulter notamment quelques références : Bollerslev *et al.* (2010); Andersen *et al.* (2009); Rombouts *et al.* (2014). Certaines extensions du modèle GARCH(1,1) ont la particularité de s'intéresser à la modélisation de l'asymétrie dans les séries de rendements financiers afin de tenir compte de l'impact des chocs négatifs et positifs sur la volatilité future. Par exemples : AGARCH (Asymetric GARCH), EGARCH (Exponentiel GARCH), VSGARCH (Volatility Switching GARCH), TGARCH (Threshold GARCH) etc. Par ailleurs, d'autres extensions du modèle GARCH(1,1) au sens de Bollerslev (1986) n'interviennent pas directement sur la structure dynamique de la volatilité mais plutôt

sur la loi des innovations z_t qui n'est pas forcément considérée comme une distribution normale standard (voir Tableau 1.2) afin de corriger le problème de normalité des rendements financiers.

Tableau 1.1: Exemples de familles GARCH (1,1).

GARCH	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$	Bollerslev 1986
AGARCH	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} + \gamma)^2 \beta_1 \sigma_{t-1}^2$	Engle 1990
EGARCH	$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1} - E[\epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}])$ $+ \gamma(\epsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}) + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2)$	Nelson 1991
NGARCH	$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1} ^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$	Higgins et Bera 1992
GJR-GARCH	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma \epsilon_{t-1}^2 I(\epsilon_{t-1} < 0) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$	Glosten et al. 1993
TARCH	$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1} I(\epsilon_{t-1} < 0) + \beta_1 \sigma_{t-1}$	Zakoïan 1994
VSGARCH	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma (\epsilon_{t-1}^2 / \sigma_{t-1}^2) I(\epsilon_{t-1} < 0) + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$	Fornari et Mele 1996

Tableau 1.2: Exemples de distributions pour l'innovation z_t ¹.

Normale	$N(0, 1)$
Student	$ST(\nu)$
Normale inverse gaussienne	$NIG(k, a, s, l)$
Hyberbolique généralisée	$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$

1.3 Tarification sous modèle GARCH (1,1)

La tarification des options en finance reste l'un des domaines d'applications des modèles GARCH depuis les contributions de Duan (1995). Quelques extensions ont vu le jour notamment avec Badescu *et al.* (2008); Badescu *et al.* (2011).

1. Sous réserve que $E_{t-1}[z_t] = 0$ et $Var_{t-1}(z_t) = 1$.

En effet, ces innovations en modélisation financière offrent aussi une solution de remplacement à l'approche de Black et Scholes (1973).

Considérons S_t le prix d'un actif financier à t . Le rendement logarithmique à l'instant t , noté y_t sous la mesure historique P , peut s'exprimer par :

$$y_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda \sigma_t - \kappa_{z_t}^P(\sigma_t) + \epsilon_t, \quad (1.12)$$

où $\epsilon_t \sim GARCH$, r est le taux d'intérêt (composé) sans risque, λ est la prime de risque du marché et κ^P est la fonction génératrice de cumulant définie par :

$$\kappa_{z_t}^P(s) = \ln E_{t-1}^P[\exp(sz_t)], \quad s \in (-u, u), u > 0.$$

L'approche de Duan (1995) permet d'étendre, en temps discret, le concept de tarification des options sous la mesure neutre au risque Q en temps continu. Cette approche est appelée LRNVR (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship).

Hypothèse 1.1 Soit $\epsilon_t \sim GARCH(1,1)$ tel que :

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \Leftrightarrow \kappa_{\epsilon_t}^P(\sigma_t) = \frac{1}{2} \sigma_t^2.$$

Définition 1.2 Duan (1995). La mesure Q est dite LRNVR si elle est absolument continue par rapport à la mesure historique P , et $\frac{S_t}{S_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}$ suit une loi lognormale sous Q telle que

$$\begin{aligned} E_{t-1}^Q \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \right] &= e^r, \\ \text{Var}_{t-1}^Q \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right) &= \text{Var}_{t-1}^P \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Le théorème suivant est dû à Duan (1995).

Théorème 1.3 On suppose que $\epsilon_t \sim GARCH(1,1)$ est de la forme (1.5) et vérifie

l'hypothèse 1.1. Alors la dynamique, sous Q , pour le rendement y_t est donnée par :

$$\begin{aligned} y_t &= r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t^*, \\ \epsilon_t^* | \mathcal{F}_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha (\epsilon_{t-1}^* - \lambda \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Preuve. Voir appendice. ■

Il existe une généralisation de l'approche de Duan (1995) lorsque z_t est non-gaussien. Il existe aussi d'autres approches de tarification sous la dynamique neutre au risque telles que l'extension du principe de Girsanov et la transformation d'Esscher conditionnelle (voir Badescu *et al.* (2008); Badescu *et al.* (2011)).

CHAPITRE II

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES COPULES

Ce chapitre présente une introduction à la théorie des copules et fait référence principalement aux ouvrages suivants : Joe (1993) ; Joe (1997) ; Embrechts *et al.* (2003) ; Nelsen (2006) ; Balakrishnan et Lai (2009) ; Engle (2009) ; Frees (2010) ; Marceau (2013) et Charpentier (2014). Dans un contexte à dimensions multiples la mesure ultime de la dépendance est la distribution conjointe définie par :

$$F(z_1, \dots, z_n) = Pr(Z_1 \leq z_1, \dots, Z_n \leq z_n), \quad (2.1)$$

telle que la distribution marginale est donnée par :

$$F_i(z_i) = F(\infty, \infty, \dots, z_i, \infty, \dots, \infty), i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

(voir Engle (2009)). La notion de « copule » fait référence à une extension de la famille de distributions à dimensions multiples via l'approche de Sklar (1959). La copule joue un rôle important en finance notamment elle résume les propriétés de la dépendance induite par les données. Pour simplifier la théorie, la plus plupart des propriétés énoncées dans ce chapitre concernent les copules à deux dimensions. Mais certaines propriétés se généralisent à plusieurs dimensions.

2.1 Définitions

Définition 2.1 (voir Embrechts et al. (2003)). On appelle *m*-copule ou copule de dimension *m* une fonction *C* de $[0, 1]^m$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui vérifie les proprié-

tés suivantes :

- (i) C est m -croissante sur $[0, 1]^m$;
- (ii) pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)' \in [0, 1]^m$, $C(\mathbf{u}) = 0$ si au moins un élément de \mathbf{u} est égal à 0 et $C(\mathbf{u}) = u_k$ si tous les éléments de \mathbf{u} sont égaux à 1 sauf u_k ;
- (iii) pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0, 1]^m$ tels que $a_i \leq b_i$ $i = 1, \dots, m$, on a :

$$V_C([\mathbf{a}; \mathbf{b}]) = \Delta_{a_m}^{b_m} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(\mathbf{u}) \geq 0$$

où

$$\Delta_{a_k}^{b_k} C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \dots, u_m) - C(u_1, \dots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \dots, u_m).$$

Lorsque $m = 2$, C est une copule bivariée de $[0, 1]^2$ vers $[0, 1]$ et les propriétés ci-dessus sont réduites à :

— pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$,

$$C(u_1, 0) = 0 = C(0, u_2), \quad C(u_1, 1) = u_1, \quad C(1, u_2) = u_2;$$

— pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$ et $v_1, v_2 \in [0, 1]$ tels que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

2.2 Propriétés

Soit C une copule bivariée. On a quelques propriétés générales indépendamment de la classe de copules.

Théorème 2.1 (voir Nelsen (2006)). Soit C une copule vérifiant la condition de Lipschitz, c'est-à-dire, pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$:

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (2.3)$$

Alors, C est continue sur $[0, 1]^2$.

Théorème 2.2 Sklar (1959). *Soit F une fonction de répartition bivariée avec marginales F_1 et F_2 . Alors il existe une copule bivariée C telle que*

$$F(z_1, z_2) = C(F_1(z_1), F_2(z_2)), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

De plus, si F_1 et F_2 sont continues, on a l'unicité de la copule C , sinon C est définie uniquement sur le support $F_1 \times F_2$. Inversement, si C est une copule bivariée, F_1 et F_2 des fonctions de répartition marginales, alors la fonction F est une fonction de répartition bivariée.

Une conséquence de ce théorème est que la structure de la dépendance peut être représentée par la copule C .

Corollaire 2.1 *Soit F une fonction de répartition bivariée avec des marginales F_1 et F_2 continues et C une copule vérifiant le théorème 2.2. Alors, pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$:*

$$C(u_1, u_2) = F(F^{-1}(u_1), F^{-1}(u_2)). \quad (2.5)$$

En particulier, si F_1 et F_2 sont des distributions uniformes sur $[0, 1]$, alors (2.5) devient

$$C(u_1, u_2) = F(u_1, u_2) \quad (2.6)$$

Corollaire 2.2 (Lemme de Hoeffding)¹. *Soit C une copule vérifiant le théorème 2.2 et (Z_1, Z_2) un vecteur de loi F . Alors*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [F(z_1, z_2) - F_1(z_1)F_2(z_2)] dz_1 dz_2 \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [C(F_1(z_1), F_2(z_2)) - F_1(z_1)F_2(z_2)] dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Corollaire 2.3 *(voir Balakrishnan et Lai (2009); Marceau (2013)). Soient f une fonction de densité bivariée, f_1, f_2 des fonctions de densité marginales et c une*

1. voir Balakrishnan et Lai (2009)

fonction de densité de la copule C . Alors,

$$f(z_1, z_2) = c(F_1(z_1), F_2(z_2)) f_1(z_1) f_2(z_2), \quad (2.8)$$

où $f(z_1, z_2) = \frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}$, $f_1(z_1) = \frac{\partial F_1(z_1)}{\partial z_1}$, $f_2(z_2) = \frac{\partial F_2(z_2)}{\partial z_2}$ et $c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$.

On va noter les dérivées partielles de la copule C par :

$$C_{u_1}(u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \quad (2.9)$$

$$C_{u_2}(u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}. \quad (2.10)$$

L'existence de ces dérivées partielles est donnée par le corollaire suivant (voir Nelsen (2006); Balakrishnan et Lai (2009)).

Corollaire 2.4 Pour tout $u_2 \in [0, 1]$, la dérivée partielle $C_{u_1}(u_2)$ existe pour presque tout u_1 et $0 \leq C_{u_1}(u_2) \leq 1$ pour u_1, u_2 . De même, $0 \leq C_{u_2}(u_1) \leq 1$.

2.3 Exemples de familles de copules

Il existe plusieurs classes de copules dans la littérature (voir Joe (1993); Balakrishnan et Lai (2009)). On s'intéresse ici à deux classes de copules : les copules archimédiennes et elliptiques.

2.3.1 Famille archimédienne

Une famille de copules particulièrement célèbre est la famille de copules archimédiennes, depuis les contributions de Genest et Mackay (1986) (voir Nelsen (2006)). Leur construction obéit à un mécanisme simple à partir d'une fonction génératrice de copule.

Définition 2.2 (voir Nelsen (2006)). Soit φ une fonction continue et strictement décroissante de $[0, 1]$ à valeurs dans $(0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$. Le pseudo-inverse

de φ , noté $\varphi^{[-1]}$, est défini de $(0, \infty]$ vers $[0, 1]$ par :

$$\varphi^{[-1]}(s) = \begin{cases} \varphi^{-1}(s), & 0 \leq s \leq \varphi(0); \\ 0, & \varphi(0) \leq s \leq \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

Si $\varphi(0) = \infty$ alors $\varphi^{[-1]}(s) = \varphi^{-1}(s)$.

Par conséquent, soit C la fonction définie de $[0, 1]^2$ sur $[0, 1]$ par :

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (2.12)$$

Alors, C est une copule si et seulement si φ est convexe. La fonction φ est appelée le *générateur* de la copule. On en déduit le théorème suivant qui sera très utile pour les simulations.

Théorème 2.3 (voir Nelsen (2006)). Soit C une copule générée par φ et soit

$$K_C(s) = V_C(\{(u_1, u_2) \in [0, 1]^2 | C(u_1, u_2) \leq s\}).$$

Alors, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$K_C(s) = s - \frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}. \quad (2.13)$$

Remarque 2.1 K_C est appelée la fonction de Kendall : K_C est une fonction de répartition de la v.a $X = C(U_1, U_2)$.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux copules archimédiennes ci-dessous (voir Joe (1993); Embrechts et al. (2003); Marceau (2013)). Les principales caractéristiques de ces copules se trouvent en appendice.

Exemples 2.1 : (Copules archimédiennes)

Pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$:

(i) Copule d'indépendance est définie par

$$C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2.$$

(ii) Copule de Clayton (figure 2.1) définie par

$$C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \text{ lorsque } \theta > 0$$

$$C_\theta(u_1, u_2) = \max\left((u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\right), \text{ lorsque } -1 \leq \theta < 0$$

$$C_\theta(u_1, u_2) = C_I(u_1, u_2), \text{ lorsque } \theta = 0.$$

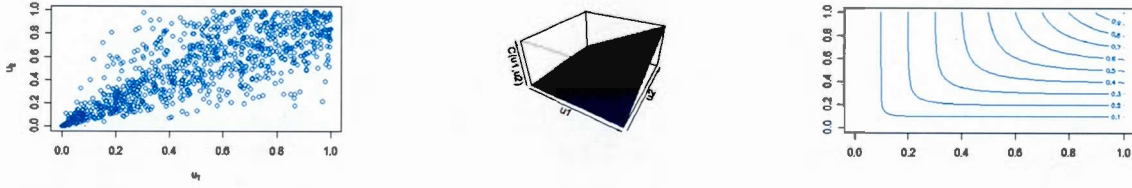


Figure 2.1: Copule de Clayton et ses lignes de niveau pour $\theta = 3$.

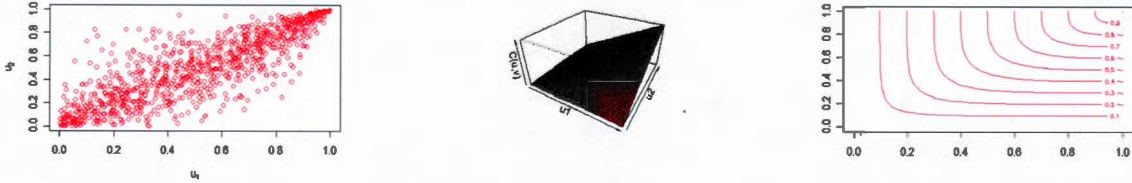


Figure 2.2: Copule de Gumbel et ses lignes de niveau pour $\theta = 3$.

(iii) Copule de Gumbel (figure 2.2) définie par

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp\left[-((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta)^{1/\theta}\right], \text{ lorsque } \theta > 1$$

$$C_\theta(u_1, u_2) = C_I(u_1, u_2), \text{ lorsque } \theta = 1.$$

2.3.2 Famille elliptique

Les copules elliptiques, à l'instar de la copule normale sont des extensions directes des distributions à dimensions multiples via la méthode de construction des copules donnée par le corollaire 2.1.

Exemples 2.2 : Copule normale (figure 2.3) définie par

$$\begin{aligned} C_\theta(u_1, u_2) &= \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx dy \end{aligned}$$

où Φ^{-1} est la fonction de répartition inverse d'une loi normale $N(0,1)$ et $\theta \in (-1, 1)$. Lorsque $\theta = 0$, C_θ est la copule d'indépendance.

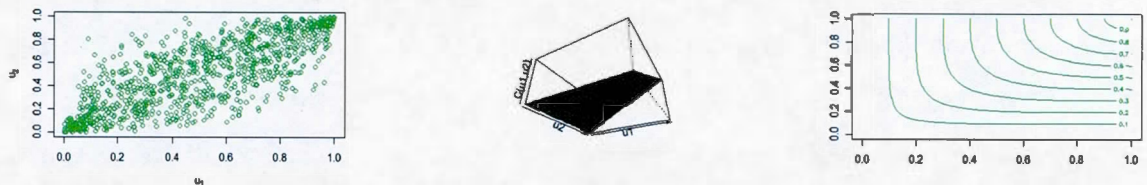


Figure 2.3: Copule normale et ses lignes de niveau pour $\theta = 0.8$.

2.4 Concept et mesures de dépendance

La dépendance est aussi une notion de concordance entre les variables aléatoires qui résume les caractéristiques suivantes (voir Nelsen (2006)) :

- les couples de variables aléatoires (Z_{1i}, Z_{2i}) et (Z_{1j}, Z_{2j}) sont concordants si $Z_{1i} < Z_{1j}$ et $Z_{2i} < Z_{2j}$ ou si $Z_{1i} > Z_{1j}$ et $Z_{2i} > Z_{2j}$;
- les couples de variables aléatoires (Z_{1i}, Z_{2i}) et (Z_{1j}, Z_{2j}) sont discordants si $Z_{1i} < Z_{1j}$ et $Z_{2i} > Z_{2j}$ ou $Z_{1i} > Z_{1j}$ et $Z_{2i} < Z_{2j}$.

2.4.1 Corrélation de Pearson

La corrélation linéaire dite corrélation de «Pearson» a longtemps été considérée comme mesure de dépendance dans les applications. Sans l'hypothèse de normalité, la corrélation de Pearson pose problème (voir Embrechts *et al.* (2003) ; Nelsen (2006)). Elle est définie par

$$\rho_P := \rho_P(Z_1, Z_2) = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{\text{Var}(Z_1)\text{Var}(Z_2)}}, \quad \rho_P \in (-1, 1). \quad (2.14)$$

En effet, la corrélation de Pearson traduit la dépendance linéaire entre les variables Z_1 et Z_2 . Elle n'est pas forcément déterminée via une copule, de plus, elle dépend des marginales. Il existe d'autres mesures de dépendance appelées mesures d'association : tau de Kendall, rho de Spearman etc. Ces mesures de dépendance sont des mesures de concordance (voir Nelsen (2006)).

Définition 2.3 (voir Nelsen (2006)). Soit κ une mesure de dépendance entre deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 , associée à la copule C . κ est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (i) κ est définie pour tout couple Z_1 et Z_2 ;
- (ii) $-1 \leq \kappa(Z_1, Z_2) \leq 1$, $\kappa(Z_1, Z_1) = 1$ et $\kappa(Z_1, -Z_1) = -1$;
- (iii) $\kappa(Z_1, Z_2) = \kappa(Z_2, Z_1)$;
- (iv) si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors $\kappa(Z_1, Z_2) = 0$;
- (v) $\kappa(-Z_1, Z_2) = \kappa(Z_1, -Z_2) = -\kappa(Z_1, Z_2)$;
- (vi) si C_1 et C_2 sont des copules telles que $C_1 \prec C_2$ alors $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$;
- (vii) (Z_{1n}, Z_{2n}) est une suite de variables aléatoires continues associée à la copule C_n et si C_n converge ponctuellement vers C alors κ_{C_n} converge ponctuellement vers κ_C .

2.4.2 Tau de Kendall

Définition 2.4 (voir Balakrishnan et Lai (2009)). Le tau de Kendall τ est défini comme la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance :

$$\tau := \tau(Z_1, Z_2) = Pr \left\{ (Z_1 - \tilde{Z}_1)(Z_2 - \tilde{Z}_2) > 0 \right\} - Pr \left\{ (Z_1 - \tilde{Z}_1)(Z_2 - \tilde{Z}_2) < 0 \right\} \quad (2.15)$$

où $\tau \in (-1, 1)$ et $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$ est indépendant de (Z_1, Z_2) . Le tau de Kendall peut s'exprimer en termes de copule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) du_1 du_2 - 1 \\ &= 4E[C(U_1, U_2)] - 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

(voir Embrechts *et al.* (2003) ; Marceau (2013)) ou en termes de générateur :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (2.17)$$

(voir Nelsen (2006) ; Balakrishnan et Lai (2009))

2.4.3 Rho de Spearman

Définition 2.5 (voir Balakrishnan et Lai (2009)). Soient (Z_1, Z_2) , $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$ et (Z'_1, Z'_2) trois couples de variables indépendants de distribution commune. Le rho de Spearman est proportionnellement égal à la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance à partir des couples (Z_1, Z_2) et (\tilde{Z}_1, Z'_2) :

$$\rho_S := \rho_S(Z_1, Z_2) = 3 \left\{ Pr \left((Z_1 - \tilde{Z}_1)(Z_2 - Z'_2) > 0 \right) - Pr \left((Z_1 - \tilde{Z}_1)(Z_2 - Z'_2) < 0 \right) \right\} \quad (2.18)$$

où $\rho_S \in (-1, 1)$.

Le rho de Spearman peut s'exprimer en termes de copule de la façon suivante :

$$\rho(z_1, z_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 \quad (2.19)$$

(voir Embrechts *et al.* (2003) ; Balakrishnan et Lai (2009) ; Marceau (2013)).

2.4.4 Coefficient de dépendance de queue

Dans cette section, nous nous intéressons à d'autres mesures de dépendance locale (queue de distributions) entre le couple (Z_1, Z_2) de variables aléatoires continues (voir Embrechts *et al.* (2003) ; Balakrishnan et Lai (2009) ; Marceau (2013)).

— Le coefficient de dépendance de queue supérieure est défini par :

$$\lambda_{Sup} := \lambda_{sup}(Z_1, Z_2) = \lim_{u \uparrow 1} Pr(Z_2 > F_2^{-1}(u) | Z_1 > F_1^{-1}(u)). \quad (2.20)$$

Il peut s'exprimer en termes de copule :

$$\lambda_{Sup} = \lim_{u \uparrow 1} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}, \quad \lambda_{Sup} \in (0, 1] \quad (2.21)$$

où $\bar{C}(u_1, u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$. De même que la copule C admet un coefficient d'indépendance de queue supérieure si $\lambda_{Sup} = 0$ (voir Balakrishnan et Lai (2009)).

— Le coefficient de dépendance de queue inférieure est défini par :

$$\lambda_{Inf} := \lambda_{Inf}(Z_1, Z_2) = \lim_{u \downarrow 0} Pr(Z_2 \leq F_2^{-1}(u) | Z_1 \leq F_1^{-1}(u)). \quad (2.22)$$

Il peut s'exprimer en termes de copule :

$$\lambda_{Inf} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}, \quad \lambda_{Inf} \in (0, 1] \quad (2.23)$$

(voir Balakrishnan et Lai (2009)). De plus, la copule C admet un coefficient d'indépendance de queue inférieure si $\lambda_{Inf} = 0$.

Nous présentons quelques illustrations, table 2.1 et figure 2.4, associées à la notion de dépendance de queue (voir Andersen *et al.* (2009) ; Frees (2010)).

Tableau 2.1: Exemples de coefficients de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et normale.

C_θ	θ	λ_{Inf}	λ_{Sup}
Clayton	1	0.50	0.00
Gumbel	1.5	0.00	0.41
Normale	0.5	0.00	0.00

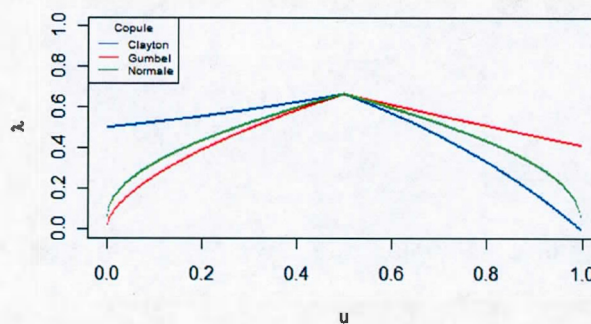


Figure 2.4: Coefficient de dépendance de queue pour les copules de Clayton, de Gumbel et normale de paramètres respectivement 1, 1.5 et 0.5.

2.5 Méthodes d'inférence

Dans cette section, nous présentons quelques méthodes d'estimation des copules (voir Joe (1997) et Charpentier (2014)). Ces méthodes sont loin d'être les seules. Soient $f_1(\cdot, \delta_1)$, $f_2(\cdot, \delta_2)$ les densités, $F_1(\cdot, \delta_1)$, $F_2(\cdot, \delta_2)$ les fonctions de répartition des variables aléatoires Z_1 et Z_2 , c_θ la densité de la copule C_θ et θ le paramètre de dépendance. L'objectif principal est d'estimer les paramètres δ_1 , δ_2 et θ .

2.5.1 Méthode des moments

C'est une méthode classique qui repose sur les équations des moments (moment d'ordre 1,2,3 etc.) de Z_1 et Z_2 pour estimer les paramètres δ_1 et δ_2 et l'inversion de la fonction de lien donnée par la relation $\theta = \psi^{-1}(\tau)$ (voir l'équation 2.16). En effet, il faut résoudre un système d'équations du type :

$$\begin{cases} M_1^j(\delta_1) = E_{\delta_1}[Z_1^j]; & j = 1, 2, \dots, \\ M_2^j(\delta_2) = E_{\delta_2}[Z_2^j]; & j = 1, 2, \dots, \\ \theta = \psi^{-1}(\tau). \end{cases} \quad (2.24)$$

En pratique, l'on se propose un estimateur du système d'équations (2.24) par :

$$\begin{cases} M_1^j(\hat{\delta}_1) = n^{-1} \sum_{i=1}^n z_{1i}^j; & j = 1, 2, \dots, \\ M_2^j(\hat{\delta}_2) = n^{-1} \sum_{i=1}^n z_{2i}^j; & j = 1, 2, \dots, \\ \hat{\theta} = \psi^{-1}(\hat{\tau}), \end{cases} \quad (2.25)$$

où le couple (z_1, z_2) est une réalisation du couple (Z_1, Z_2) et $\hat{\tau}$ est l'estimateur du tau de Kendall à partir de l'échantillon :

$$\hat{\tau} = (c - d)/(c + d) \quad (2.26)$$

où c le nombre de concordances et d le nombre de discordances sur le couple (Z_1, Z_2) (voir Balakrishnan et Lai (2009)). Pour estimer le paramètre θ par la méthode des moments, on peut aussi utiliser la relation entre le rho de Spearman et θ (voir l'équation 2.19). De plus, on pourrait opter pour une méthode mixte, c'est-à-dire : estimer les paramètres δ_1 et δ_2 via la méthode du maximum de vraisemblance décrite ci-bas et vice versa.

2.5.2 Maximum de vraisemblance exacte

On considère les échantillons d'observations associés respectivement à Z_1 et Z_2 : $z_1 = z_{11}, \dots, z_{1n}$ et $z_2 = z_{21}, \dots, z_{2n}$. La fonction de vraisemblance est donnée, en

utilisant le corollaire 2.3, par :

$$\mathcal{L}(\delta_1, \delta_2, \theta, z_1, z_2) = \prod_{i=1}^n c_\theta(F_1(z_{1i}, \delta_1), F_2(z_{2i}, \delta_2)) f_1(z_{1i}, \delta_1) f_2(z_{2i}, \delta_2). \quad (2.27)$$

Ainsi, la log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned} l(\delta_1, \delta_2, \theta) &= \log \mathcal{L}(\delta_1, \delta_2, \theta, z_1, z_2) = \sum_{i=1}^n \log(c_\theta(F_1(z_{1i}, \delta_1), F_2(z_{2i}, \delta_2))) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [\log(f_1(z_{1i}, \delta_1)) + \log(f_2(z_{2i}, \delta_2))] \end{aligned} \quad (2.28)$$

d'où

$$(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\theta}) = \arg \max l(\delta_1, \delta_2, \theta). \quad (2.29)$$

2.5.3 Inférence sur les marginales

Cette méthode appelée IFM (Inference Functions for Margins) dans la littérature des copules consiste à estimer séparément les paramètres δ_1, δ_2 associés aux marginales f_1, f_2 puis le paramètre de dépendance θ via la méthode du maximum de vraisemblance (voir Charpentier (2014)). Soient $l_1(\delta_1), l_2(\delta_2)$ et $l_c(\theta)$ les log-vraisemblances associées respectivement à $f_1(\cdot, \delta_1), f_2(\cdot, \delta_2)$ et c_θ . On a :

$$\begin{cases} \hat{\delta}_1 = \arg \max l_1(\delta_1), \\ \hat{\delta}_2 = \arg \max l_2(\delta_2). \end{cases} \quad (2.30)$$

Puis, l'on pose $u_{1i} = F_1(z_{1i}, \hat{\delta}_1)$ et $u_{2i} = F_2(z_{2i}, \hat{\delta}_2)$ pour $i = 1, \dots, n$. On obtient l'estimateur de θ par :

$$\hat{\theta} = \arg \max l_c(\theta) = \arg \max \sum_{i=1}^n \log(c_\theta(u_{1i}, u_{2i})). \quad (2.31)$$

La démarche précédente est une méthode dite « paramétrique ». La méthode « semi-paramétrique » consiste à remplacer les fonctions de répartition F_1 et F_2 par les fonctions de répartition empiriques $F_{1,n}$ et $F_{2,n}$.

2.6 Méthodes de simulation

Dans cette section, nous présentons des algorithmes généraux de simulation des copules (voir Embrechts *et al.* (2003) ; Balakrishnan et Lai (2009) ; Marceau (2013)). Par ailleurs, il existe un algorithme de simulation spécifique à certaines copules.

2.6.1 Cas général

Algorithme 2.1 : *Cas général*

Simuler un échantillon $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})', j = 1, \dots, N$, à partir de la copule C en utilisant la copule conditionnelle $C_{u_1}(u_2)$.

Étape 1 : Générer $u_1^{(j)}$ et $s^{(j)}, j = 1, \dots, N$ à partir d'une loi uniforme $U(0, 1)$.

Étape 2 : Calculer $u_2^{(j)} = C_{u_1}^{-1}(s^{(j)})$. On a $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})' \sim C$.

2.6.2 Copule archimédienne

Algorithme 2.2 : *Copules archimédiennes*

Simuler un échantillon $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})', j = 1, \dots, N$, à partir de la copule C en utilisant la fonction de Kendall K_C du théorème 2.3 :

Étape 1 : Générer $(s^{(j)}, q^{(j)}) \sim U(0, 1), j = 1, \dots, N$.

Étape 2 : Poser $p^{(j)} = K_C^{-1}(q^{(j)})$.

Étape 3 : Calculer $u_1^{(j)} = \varphi^{[-1]}(s^{(j)}\varphi(p^{(j)}))$ et $u_2^{(j)} = \varphi^{[-1]}(1 - s^{(j)})\varphi(p^{(j)})$. On a $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})' \sim C$.

2.6.3 Cas spécial : copule normale

Algorithme 2.3 : *Cas spécial (copule normale)*

Simuler un échantillon $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})', j = 1, \dots, N$, à partir de la copule gaussienne C en utilisant la décomposition de Cholesky² de la matrice de corrélation R .

2. Voir appendice

Étape 1 : Trouver la matrice de la décomposition de Cholesky B à partir de R .

Étape 2 : Générer le vecteur $s^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, à partir de $\mathcal{N}(0, 1)$ où $s = (s_1, s_2)'$ indépendantes.

Étape 3 : Poser $x^{(j)} = Bs^{(j)}$ où $x = (x_1, x_2)'$.

Étape 4 : Calculer $u_i^{(j)} = \Phi(x_i^{(j)})$, $i = 1, 2$. On a, $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})' \sim C$.

CHAPITRE III

MODÈLES DCC-GARCH

Ce chapitre traite de la corrélation dynamique conditionnelle basée sur l'approche étudiée par Engle (2002) ; Engle et Sheppard (2005) et par Engle (2009). Dans le chapitre 2, nous avons mentionné que la corrélation de Pearson est une mesure de dépendance linéaire et qu'elle ne peut être considérée comme une mesure de dépendance au même titre que le tau de Kendall ou le rho de Spearman sans y ajouter certaines conditions notamment la normalité. Dans le contexte des séries financières, la corrélation n'est généralement pas constante au cours du temps conditionnellement à l'information disponible. Formalisons par $\rho_{12,t}$ la corrélation conditionnelle, au sens de Pearson, entre deux rendements financiers y_{1t} et y_{2t} , au temps t . Elle est définie par :

$$\rho_{12,t} = \frac{E_{t-1} [y_{1t}y_{2t}]}{\sqrt{E_{t-1} [y_{1t}^2] E_{t-1} [y_{2t}^2]}}, \quad (3.1)$$

où $y_{it} = \log \frac{S_{it}}{S_{it-1}}$ est le rendement associé au sous-jacent financier S_{it} à t pour $i = 1, 2$ et tel que $E_{t-1} [y_{it}] = 0$.

3.1 Présentation du modèle de Engle (2002)

Dans le chapitre 1, nous avons défini la relation entre le rendement financier et la variance conditionnelle dans le cadre univarié par

$$\begin{aligned} y_{it} &= E_{t-1}[y_{it}] + \epsilon_{it}, \\ \epsilon_{it} &= \sigma_{it} z_{it}, \quad z_{it} | \mathcal{F}_{t-1} \sim D(0, 1), \\ \sigma_{it} &\sim \text{type - GARCH}(1, 1), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le modèle introduit par Engle (2002) fait partie d'une large classe de modèles GARCH multivariés qui ne sont pas abordés dans ce mémoire. Cependant, ce modèle est une généralisation naturelle de l'approche introduite par Bollerslev (1990) : CCC-GARCH « Constant Conditional Correlation GARCH ».

3.1.1 CCC-GARCH de Bollerslev 1990

Le modèle CCC-GARCH introduit par Bollerslev (1990) est défini comme suit :

soient $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})'$, $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \dots, \epsilon_{Nt})'$ et $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{Nt})'$.

Hypothèse 3.1 *On suppose que $E_{t-1}[y_t] = 0$:*

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t, \\ H_t &= E_{t-1}[\epsilon_t \epsilon_t'] \\ R &= E_{t-1}[z_t z_t'] \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec H_t la matrice de covariance conditionnelle, définie positive pour tout t et qui se décompose comme suit :

$$H_t = D_t R D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sigma_{1t}, \sigma_{2t}, \dots, \sigma_{Nt},) \quad (3.4)$$

où

$$\begin{cases} R = [\bar{\rho}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}; \\ -1 \leq \bar{\rho}_{ij} \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

est la matrice de corrélation conditionnelle constante, définie positive par construction. L'estimateur naturel de cette matrice est la matrice de corrélation non conditionnelle à partir de l'échantillon (voir Engle (2002)).

3.1.2 DCC-GARCH de Engle 2002

Le modèle DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation GARCH) est une extension du modèle CCC-GARCH qui introduit une flexibilité dans le modèle CCC-GARCH tel que proposé par Bollerslev (1990). En effet, la corrélation conditionnelle est dynamique et tient compte de la mise à jour de l'information enregistrée par la volatilité conditionnelle des rendements (voir Engle (2009)). Lorsque les rendements y_{1t}, \dots, y_{Nt} sont dans le même sens (croissant ou décroissant), les corrélations augmentent. Et, lorsque les rendements sont dans le sens opposé, les corrélations diminuent. Le modèle est formulé sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.2 On suppose que $E_{t-1}[y_t] = 0$. La matrice de covariance est définie par :

$$E_{t-1}[\epsilon_t \epsilon_t'] = H_t = D_t R_t D_t, \quad D_t^2 = \text{diag}\{H_t\}. \quad (3.6)$$

La matrice de corrélation conditionnelle est simplement la matrice de covariance des innovations :

$$R_t = E_{t-1}[z_t z_t'] = \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2}, \quad (3.7)$$

où

$$Q_t = (1 - \phi_1 - \phi_2)\bar{R} + \phi_1(z_{t-1}z_{t-1}') + \phi_2 Q_{t-1}. \quad (3.8)$$

Remarque 3.1 On spécifie les écritures matricielles ci-dessus :

1. $D_t^2 = \text{diag}\{H_t\} = \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{Nt}^2)$;
2. $\bar{R} = [\bar{\rho}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}$ matrice de corrélation non conditionnelle de z_t ;

3. $R_t = [\rho_{ijt}]_{1 \leq i, j \leq N}$ où $\rho_{ijt} = \frac{q_{ijt}}{\sqrt{q_{iit}q_{jjt}}}$,

$$q_{ijt} = \bar{\rho}_{ij} + \phi_1(z_{i,t-1}z_{j,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) + \phi_2(q_{ij,t-1} - \bar{\rho}_{ij}), \quad (3.9)$$

et où les coefficients ϕ_1, ϕ_2 et $(1 - \phi_1 - \phi_2)$ sont positifs. La covariance (3.9) peut aussi s'écrire

$$q_{ijt} = \bar{\rho}_{ij} \left(\frac{1 - \phi_1 - \phi_2}{1 - \phi_2} \right) + \phi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \phi_2^{j-1} z_{i,t-k} z_{j,t-k}. \quad (3.10)$$

On voit que si l'on ignore la mise à jour de l'information sur les rendements, $q_{ijt} \cong \bar{\rho}_{ij}$ et $\rho_{ijt} \cong \bar{\rho}_{ij}$. On retrouve le modèle CCC-GARCH.

Proposition 3.1 Engle et Sheppard (2005). Si les paramètres de GARCH univariés et DCC vérifient les conditions suivantes :

- (i) $\alpha_{0i} > 0$, $i = 1, \dots, N$;
 - (ii) $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$;
 - (iii) $\sigma_{0i}^2 > 0$, $i = 1, \dots, N$;
 - (iv) $\alpha_i + \beta_i < 1$, $i = 1, \dots, N$;
 - (v) $\phi_1 \geq 0$ et $\phi_2 \geq 0$;
 - (vi) $\phi_1 + \phi_2 < 1$;
 - (vii) le minimum des valeurs propres de \bar{R} est positif,
- alors, la matrice H_t est définie positive pour tout t .

Preuve. Voir Engle et Sheppard (2005). ■

3.2 Estimation

Puisque le modèle CCC-GARCH est un cas particulier du DCC-GARCH, on s'intéresse directement à l'estimation du modèle DCC. L'estimation via la méthode du maximum de vraisemblance est celle proposée par Engle (2002) sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3 *On suppose que*

$$\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, D_t R_t D_t). \quad (3.11)$$

La log-vraisemblance pour les observations $\epsilon_1, \dots, \epsilon_T$ est donnée par :

$$\begin{aligned} l(\theta, \bar{R}, \phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log |H_t| + \epsilon_t' H_t^{-1} \epsilon_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + \log |D_t R_t D_t| + \epsilon_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} \epsilon_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log |R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \epsilon_t' D_t^{-2} \epsilon_t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (z_t' z_t + \log |R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t) \\ &:= l_v(\theta) + l_c(\theta, \bar{R}, \phi). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Selon Engle (2009) et Engle (2002), pour maximiser l'équation (3.12), on peut procéder en trois étapes :

Étape 1 : proposer un estimateur de \bar{R} par la méthode des moments :

$$\hat{\bar{R}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t z_t'. \quad (3.13)$$

Étape 2 : maximiser la log-vraisemblance relativement aux équations des modèles GARCH univariés donnée par :

$$\begin{aligned} l_v(\theta) &:= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (N \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \epsilon_t' D_t^{-2} \epsilon_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(T \log(2\pi) + \sum_{t=1}^T \left(\log(\sigma_{it}^2) + \frac{\epsilon_{it}^2}{\sigma_{it}^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En effet, cette étape consiste, en pratique, à estimer séparément les modèles GARCH univariés (voir chapitre 1). L'estimateur du maximum de vraisemblance

pour θ qui contient les paramètres des modèles GARCH univariés est donné par :

$$\hat{\theta} = \arg \max l_v(\theta) \quad \text{où} \quad \theta = (\alpha_{0,1}, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{0,N}, \alpha_N, \beta_N). \quad (3.15)$$

Étape 3 : calculer l'estimateur de ϕ en maximisant la log-vraisemblance reliée aux corrélations :

$$l_c(\hat{\theta}, \hat{R}, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (z'_t z_t + \log |R_t| + z'_t R_t^{-1} z_t). \quad (3.16)$$

Soit

$$\hat{\phi} = \arg \max l_c(\hat{\theta}, \hat{R}, \phi) \quad \text{où} \quad \phi = (\phi_1, \phi_2). \quad (3.17)$$

Remarque 3.2 On a que :

1. le modèle CCC-GARCH étant un cas particulier du modèle DCC-GARCH, l'estimation du modèle CCC-GARCH est réduite aux étapes 1 et 2 de la procédure ci-haut où $R = R_t$.
2. l'équation (3.16) de l'étape 3 contient la matrice de corrélation R_t de taille $N \times N$ très difficile à inverser et la convergence n'est pas garantie. Pour simplifier ce problème, Engle (2009), page 74, propose une méthode ad-hoc appelée « Méthode de MacGyver ». En effet, pour chaque paire d'actifs financiers i et j dont les innovations sont réduites à $z_t = (z_{it}, z_{jt})'$, la matrice de corrélation conditionnelle réduite est définie par :

$$R_{ijt} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ijt} \\ \rho_{ijt} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |R_{ijt}| = 1 - \rho_{ijt}^2, \quad (3.18)$$

puis

$$z'_t R_{ijt}^{-1} z_t = \frac{z_{it}^2 + z_{jt}^2 - 2\rho_{ijt} z_{it} z_{jt}}{1 - \rho_{ijt}^2}. \quad (3.19)$$

Il résulte de (3.18) et (3.19) que maximiser l'équation (3.16) de l'étape 3 pour N actifs, revient à maximiser la log-vraisemblance par paire d'actifs financiers i et j :

$$l_{ij}^c(\hat{\theta}, \hat{\rho}_{ij}, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log(1 - \rho_{ijt}^2) + \frac{z_{it}^2 + z_{jt}^2 - 2\rho_{ijt} z_{it} z_{jt}}{1 - \rho_{ijt}^2} \right). \quad (3.20)$$

Les étapes 1 et 2 de la procédure précédente sont conservées.

3.3 Propriétés asymptotiques

Engle et Sheppard (2005) ont établi les propriétés asymptotiques des estimateurs $\xi = (\theta, \bar{R}, \phi)$ du maximum de vraisemblance sous le modèle présenté par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, D_t R_t D_t), \\ D_t^2 = \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{Nt}^2), \\ \sigma_{it}^2 \sim GARCH(1, 1); \quad i = 1, \dots, N \\ R_t = \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2}, \\ Q_t = \bar{R} + \phi_1(z_{t-1}z'_{t-1} - \bar{R}) + \phi_2(Q_{t-1} - \bar{R}). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

D'après la section précédente, on a :

$$\hat{\xi} = (\hat{\theta}, \hat{\bar{R}}, \hat{\phi}) = \arg \max l(\theta, \bar{R}, \phi; \epsilon_t), \quad (3.22)$$

où

$$l(\theta, \bar{R}, \phi; \epsilon_t) = l_v(\theta; \epsilon_t) + l_c(\theta, \bar{R}, \phi; \epsilon_t). \quad (3.23)$$

Soient g_{1T} , g_{2T} et g_{3T} des fonctions définies par les conditions de premier ordre :

$$g_{1T}(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \nabla_{\theta} l_v(\theta; \epsilon_t), \quad (3.24)$$

$$g_{2T}(\theta, \bar{R}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\bar{R} - z_t z'_t), \quad (3.25)$$

$$g_{3T}(\theta, \bar{R}, \phi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \nabla_{\phi} l_c(\theta, \bar{R}, \phi; \epsilon_t). \quad (3.26)$$

Soit $\xi_0 = (\theta_0, \bar{R}_0, \phi_0)$ le vrai paramètre à estimer. Sous certaines conditions de régularité (voir théorème 1 de Engle et Sheppard (2005)) on a la convergence asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\xi}_T \xrightarrow{p} \xi_0. \quad (3.27)$$

De plus, le théorème 2 de Engle et Sheppard (2005) établit la normalité asymptotique :

$$\sqrt{T}(\hat{\xi}_T - \xi_0) \xrightarrow{d} N(0, A_0^{-1} B_0 A_0'^{-1}), \quad (3.28)$$

où A_0 et B_0 sont données par

$$A_0 = E \begin{bmatrix} \nabla_{\theta} g_{1T}(\theta_0) & 0 & 0 \\ \nabla_{\theta} g_{2T}(\theta_0, \bar{R}_0) & \nabla_{\bar{R}} g_{2T}(\theta_0, \bar{R}_0) & 0 \\ \nabla_{\theta} g_{3T}(\theta_0, \bar{R}_0, \phi_0) & \nabla_{\bar{R}} g_{3T}(\theta_0, \bar{R}_0, \phi_0) & \nabla_{\phi} g_{3T}(\theta_0, \bar{R}_0, \phi_0) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$B_0 = Var \left[\sum_{t=1}^T g_{1t}(\theta_0), \sum_{t=1}^T g_{2t}(\theta_0, \bar{R}_0), \sum_{t=1}^T g_{3t}(\theta_0, \bar{R}_0, \phi_0) \right]. \quad (3.30)$$

(voir Engle (2009) ; Engle et Sheppard (2005)) pour plus de détails.

3.4 Analyse des corrélations des indices boursiers

Dans cette section, nous présentons les séries des indices boursiers du NYSE (New York Stock Exchange), du NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotations) et du S&P500 (Standard and Poor's) sur la période du 03/01/2000 au 08/12/2014 soit 3757 observations (voir figure 3.1). Ces séries ont la particularité d'être représentatives du marché boursier américain par leur taille et leur composition. De plus, ces séries présentent la même tendance à la hausse et à la baisse dans le temps en particulier durant la crise financière de 2008, ce qui explique également les fortes corrélations entre elles (table 3.1). Par la suite, nous analysons les corrélations constantes (table 3.1) et conditionnelles au sens de Pearson et de Engle (2002) (voir les figures 3.2, 3.3 et 3.4). Les estimateurs du maximum de vraisemblance des modèles DCC-GARCH(1,1) (voir les tables 3.2, 3.3 et 3.4) sont obtenus grâce à la méthode de « McGyver » présentée dans Engle (2009) à partir des modèles GARCH(1,1) au sens de Bollerslev (1986) et à l'aide du logiciel R (package ccgarch) de R Core Team (2015). Il faut remarquer que les estimateurs du modèle CCC-GARCH(1,1) sont exactement les mêmes pour

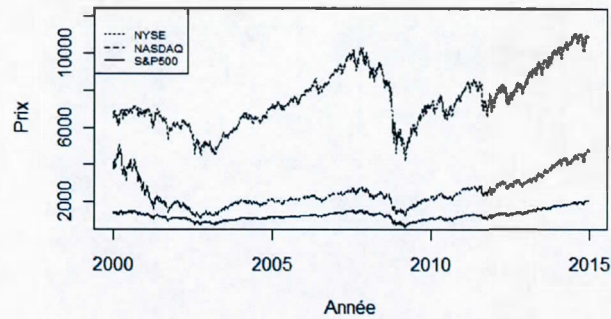


Figure 3.1: Prix des indices boursiers : NYSE, NASDAQ et S&P500 du 03/01/2000 au 08/12/2014.

les GARCH(1,1) univariés au sens de Bollerslev (1986) que pour le modèle DCC-GARCH(1,1) en plus des coefficients de la matrice de corrélation empirique du tableau 3.1. Ainsi, les corrélations conditionnelles temporelles de Pearson (voir l'équation (3.1) sont obtenues grâce à la méthode d'estimation par fenêtres mobiles de 10 jours, approche étudiée par Zivot et Wang (2003). Cependant, le choix de la taille de la fenêtre est important. Nous avons choisi ici la taille $n = 10$ de sorte qu'en moyenne la corrélation conditionnelle au sens de Pearson ρ_t coïncide avec le paramètre de dépendance conditionnel θ_t de la copule normale (voir chapitre 4). Les mêmes choix de la taille de la fenêtre mobile n sont appliqués aux problèmes des chapitres 4 et 5. En conclusion, les graphiques des corrélations entre 03/01/2000 et 08/12/2014 (voir les figures 3.2, 3.3 et 3.4) montrent bien que la corrélation n'est pas constante à travers le temps pour les séries financières. On observe donc des fortes variations par rapport à la corrélation constante. Et le retour à la moyenne est plus rapide pour la corrélation conditionnelle dynamique du modèle DCC que la corrélation temporelle au sens de Pearson.

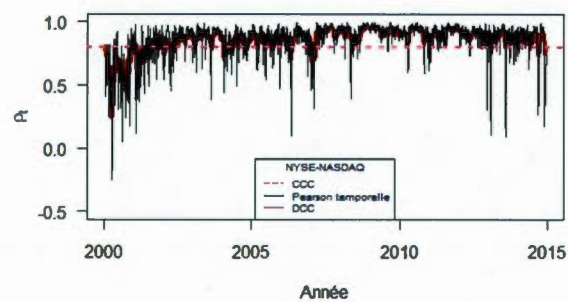


Figure 3.2: Corrélations conditionnelles : NYSE-NASDAQ.

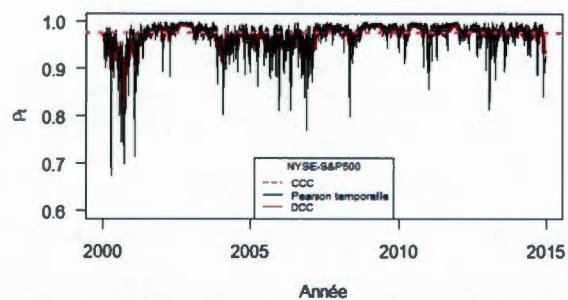


Figure 3.3: Corrélations conditionnelles : NYSE-S&P500.

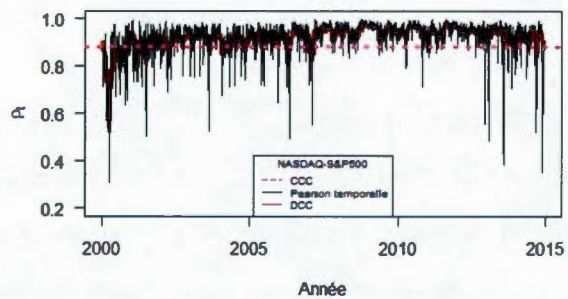


Figure 3.4: Corrélations conditionnelles : NASDAQ-S&P500.

Tableau 3.1: Corrélations constantes des rendements entre NYSE, NASDAQ et S&P500 du 03/01/2000 au 08/12/2014.

ρ	NYSE	NASDAQ	S&P500
NYSE	1.000	0.806	0.976
NASDAQ	0.806	1.000	0.884
S&P500	0.976	0.884	1.000

Tableau 3.2: Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NYSE-NASDAQ.

Paramètres	Estimés	Écart-types
GARCH		
α_{01}	1.563130×10^{-6}	4.617858×10^{-7}
α_1	8.931222×10^{-2}	1.189620×10^{-2}
β_1	8.989192×10^{-1}	1.003212×10^{-2}
α_{02}	1.503415×10^{-6}	1.231254×10^{-2}
α_2	1.609051×10^{-2}	4.984173×10^{-7}
β_2	9.139824×10^{-1}	9.463605×10^{-3}
DCC		
ϕ_1	4.409124×10^{-2}	9.574271×10^{-2}
ϕ_2	9.500060×10^{-1}	1.222482×10^{-1}
CCC		
ρ	0.806	—
Log-vraisemblance : - 59299.18		

Tableau 3.3: Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NYSE-SP500.

Paramètres	Estimés	Écart-types
GARCH		
α_{01}	1.563130×10^{-6}	4.617858×10^{-7}
α_1	8.931222×10^{-2}	1.189620×10^{-2}
β_1	8.989192×10^{-1}	1.154736×10^{-2}
α_{02}	1.545453×10^{-6}	1.231254×10^{-2}
α_2	9.029468×10^{-2}	5.098141×10^{-7}
β_2	8.986189×10^{-1}	1.126726×10^{-2}
DCC		
ϕ_1	4.759105×10^{-2}	1.953382×10^{-1}
ϕ_2	9.460726×10^{-1}	2.454361×10^{-1}
CCC		
ρ	0.976	—
Log-vraisemblance : -64255.17		

Tableau 3.4: Estimation des paramètres CCC-GARCH(1,1) et DCC-GARCH(1,1) : NASDAQ-SP500.

Paramètres	Estimés	Écart-types
GARCH		
α_{01}	1.609051×10^{-6}	4.984173×10^{-7}
α_1	7.915598×10^{-2}	9.463605×10^{-3}
β_1	9.139824×10^{-1}	1.154736×10^{-2}
α_{02}	1.545453×10^{-6}	1.003212×10^{-2}
α_2	9.029468×10^{-2}	5.098141×10^{-7}
β_2	8.986189×10^{-1}	1.126726×10^{-2}
DCC		
ϕ_1	4.117217×10^{-2}	8.013848×10^{-2}
ϕ_2	9.530560×10^{-1}	1.008527×10^{-1}
CCC		
ρ	0.884	—
Log-vraisemblance :		
	-60104.81	

CHAPITRE IV

DÉPENDANCE DYNAMIQUE EN TARIFICATION DES PRODUITS DÉRIVÉS VIA MODÈLES GARCH

Dans ce chapitre, nous appliquons le concept de la dépendance dynamique à la tarification des options bivariées. Cependant, la modélisation des actifs sous-jacents est faite sous un modèle GARCH et la notion de dépendance est reliée aux copules avec paramètres de dépendance statique et dynamique ainsi qu'à la corrélation constante et dynamique conditionnelle. Ce chapitre fait principalement référence aux auteurs suivants : van den Goorbergh *et al.* (2005); Chiou et Tsay (2008); Zhang et Guégan (2008); Patton (2006); Patton (2012); Oh et Patton (2013); Patton (2013); Fengler *et al.* (2012); Lee et Long (2009); Engle (2002) et Engle (2009).

On considère le rendement bivarié défini par $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$, $t = 1, \dots, T$ dont chaque rendement suit, sous la mesure physique P , la dynamique :

$$\begin{aligned} y_{it} &= \mu_{it} + \epsilon_{it}, \\ \epsilon_{it} &= \sigma_{it} z_{it}, \quad z_{it} | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_i(\cdot, \delta_i), \\ \sigma_{it} &\sim \text{type - GARCH}(1, 1), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $E_{t-1}[z_{it}] = 0$, $Var_{t-1}(z_{it}) = 1$ et où σ_{it}^2 est la variance conditionnelle associée au rendement y_{it} (voir figure 4.1).

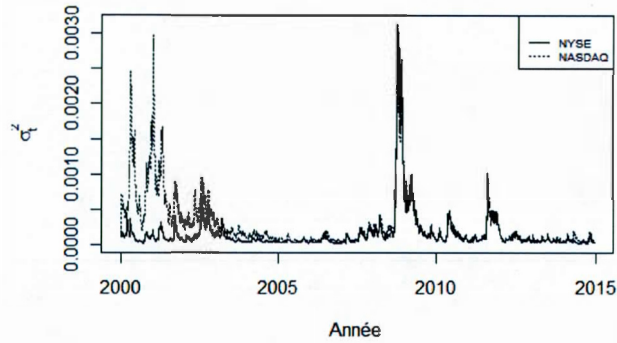


Figure 4.1: Variance conditionnelle sous le modèle GARCH(1,1) : NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.

4.1 Méthodes d'estimation du paramètre de dépendance statique

Suivant l'équation (4.1), l'innovation (voir figure 4.2) associée au rendement y_{it} pour $i = 1, 2$ est donnée par :

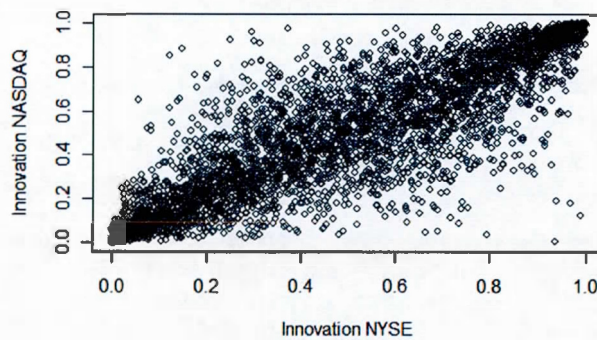


Figure 4.2: Dépendance positive entre NYSE et NASDAQ illustrée par les innovations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.

$$z_{it} = \frac{y_{it} - \mu_{it}}{\sigma_{it}}. \quad (4.2)$$

On définit le couple de variables aléatoires uniformes $u_t = (u_{1t}, u_{2t})$ tel que

$$\begin{cases} u_{it} = F_i(z_{it}, \delta_i), \text{ pour } i = 1, 2; \\ u_t \sim C_\theta, \end{cases} \quad (4.3)$$

où θ est le paramètre de dépendance associé à la copule C . Le paramètre θ est invariant au cours du temps. Par conséquent, $\xi = (\delta_1, \delta_2, \theta)$ est le paramètre à estimer dans le modèle défini par les équations (4.1), (4.2) et (4.3).

4.1.1 Méthode du maximum de vraisemblance

On se propose d'estimer le paramètre $\xi = (\delta_1, \delta_2, \theta)$ par le biais de la méthode du maximum de vraisemblance discutée dans le chapitre 2 (voir également Dias et Embrechts (2010) et Patton (2013) dans le cadre des séries temporelles). Soit

$$\hat{\xi}_T = \arg \max l(\xi), \quad (4.4)$$

où

$$l(\xi) = \sum_{t=1}^T \left(\log c_\theta(u_{1t}, u_{2t}) + \sum_{i=1}^2 \log f_i(z_{it}, \delta_i) \right), \quad (4.5)$$

et $c_\theta(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C_\theta(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$, $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ est la densité de la copule C_θ . En pratique (voir Dias et Embrechts (2010)) on suggère de procéder en deux étapes, par la méthode d'inférence sur les marginales IFM : « Inference Functions for Margins » avec les log-vraisemblance marginales définies par

$$l(\delta_i) = \sum_{t=1}^T \log f_i(z_{it}, \delta_i), \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4.6)$$

et la log-vraisemblance finale à maximiser est donnée par

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c_\theta(F_1(z_{1t}, \hat{\delta}_1), F_2(z_{2t}, \hat{\delta}_2)). \quad (4.7)$$

4.1.2 Méthode d'inversion du tau de Kendall

L'idée de cette approche est d'estimer le paramètre θ par inversion de la fonction de lien ψ_C entre θ et le tau de Kendall relative à la copule C définie par :

$$\tau = \psi_C(\theta) \Leftrightarrow \theta = \psi_C^{-1}(\tau), \quad \tau \in (-1, 1). \quad (4.8)$$

On déduit de l'équation (4.8), l'estimateur de θ (voir table 4.1) donné par :

$$\hat{\theta} = \psi_C^{-1}(\hat{\tau}), \quad (4.9)$$

où $\hat{\tau}$ est le tau de Kendall empirique défini par :

$$\hat{\tau} = (c - d)/(c + d), \quad (4.10)$$

avec c le nombre de paires concordantes et d le nombre de paires discordantes. D'autres méthodes d'estimation du paramètre θ sont discutées dans Oh et Patton (2013); Patton (2013).

Tableau 4.1: Estimation du paramètre de dépendance statique associé aux copules : Clayton, Gumbel et normale pour les données NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014.

Méthodes	θ statique		
	$\hat{\theta}^{Clayton}$	$\hat{\theta}^{Gumbel}$	$\hat{\theta}^{Normale}$
Maximum de vraisemblance	2.992(0.558)	3.109(0.351)	0.905(0.018)
Inversion du tau de Kendall	5.044	3.522	0.902

Nous avons considéré les modèles GARCH(1,1) univariés au sens de Bollerslev (1986) pour les actifs NYSE et NASDAS avec des innovations supposées gaussiennes centrées et réduites. Les chiffres entre parenthèses représentent les écart-types pour la méthode du maximum de vraisemblance.

4.2 Méthode d'estimation du paramètre de dépendance dynamique

L'hypothèse habituelle sur le paramètre de dépendance θ est de supposer que $\theta \equiv \theta_t$ (voir Bernard et Czado (2013)). Une approche dynamique de θ_t est plus flexible et réaliste pour la modélisation des séries financières ainsi que pour l'évaluation des options bivariées (voir van den Goorbergh *et al.* (2005) ; Chiou et Tsay (2008)).

4.2.1 Tau de Kendall conditionnel dynamique

On peut modéliser la dynamique du paramètre θ_t en utilisant la relation entre le tau de Kendall et θ_t donnée par :

$$\theta_t = \psi_G^{-1}(\tau_t). \quad (4.11)$$

Pour ce faire, van den Goorbergh *et al.* (2005) ; Chiou et Tsay (2008) proposent une dynamique du tau de Kendall conditionnel sous la forme :

$$\tau_t = h(\sigma_{1t}, \sigma_{2t}), \quad (4.12)$$

où $\sigma_{it} \sim (type) - GARCH(1, 1)$.

Par exemple, van den Goorbergh *et al.* (2005) proposent une fonction h définie par :

$$h(\sigma_{1t}, \sigma_{2t}) = \gamma_0 + \gamma_1 \log \max(\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2). \quad (4.13)$$

Cette approche met en évidence la relation naturelle entre le tau de Kendall et les volatilités associées aux rendements y_{1t} et y_{2t} . Mais, elle manque de souplesse notamment quant à l'assurance que le tau de Kendall τ_t soit compris entre -1 et 1 (voir la figure 4.3).

Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle dynamique du tau de Kendall nommée : tau de Kendall autorégressif conditionnel d'ordre p (en anglais : autoregressive conditional Kendall's tau of order p ou AR(p)-CKT). Cette nouvelle

dynamique est basée sur l'approche de Patton (2006) et définie par :

$$\tau_t = L \left(\omega_0 + \sum_{k=1}^p \omega_k \tau_{t-k} + \eta_t \right) \Leftrightarrow L^{-1}(\tau_t) = \omega_0 + \sum_{k=1}^p \omega_k \tau_{t-k} + \eta_t, \quad (4.14)$$

où $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 et L est la transformation logistique modifiée (ce qui permet à τ_t d'être compris entre -1 et 1 en tout temps) donnée par :

$$L(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{1 + \exp(-x)}. \quad (4.15)$$

Pour estimer l'équation (4.14), on a recours à la méthode de régression sur séries temporelles (voir Brockwell et Davis (2002) ; Zivot et Wang (2003)). En effet, les régresseurs $\tau_{t-k}, k = 1, \dots, p$ dans la transformation $L^{-1}(\tau_t)$ permettent de capturer toute la persistance dans la dépendance. De plus, l'équation (4.14) peut être simulée facilement tout en respectant les contraintes sur le support du tau de Kendall (τ_t compris entre -1 et 1) sans contraintes supplémentaires sur les paramètres $\omega_k, k = 0, 1, \dots, p$. L'idée derrière ces approches est que le tau de Kendall est observable empiriquement, ce qui permet de calibrer les équations (4.13) et (4.14) via la méthode de régression (voir table 4.2). Puis, on pourra déduire la dynamique de θ_t par la relation décrite par l'équation (4.11) relativement à la copule choisie (voir les figures 4.5, 4.6 et 4.7). De façon similaire, on pourrait établir la relation entre le rho de Spearman et le paramètre de dépendance θ_t si cela est explicite pour certaines copules. On note que l'approche AR(p)-CKT est plus souple que l'approche de van den Goorbergh *et al.* (2005) car elle donne une meilleure prévision tout en respectant les contraintes aux bornes (voir les figures 4.3 et 4.4) sur les observations historiques du tau de Kendall. Par conséquent, nous avons utilisé l'approche AR(1)-CKT pour estimer l'évolution historique de différents paramètres de dépendance θ_t pour les copules de Clayton, de Gumbel et la copule normale. On observe également que les résultats de la table 4.3 sont différents de ceux de la table 4.1, mais on s'y attendait qu'ils soient effectivement

différents : c'était l'objectif de notre démarche. Par ailleurs, les dynamiques de θ_t sous l'approche AR(1)-CKT respectent les contraintes reliées aux différents supports associés aux copules pris en exemples et l'on observe une évolution adéquate et une meilleure prévision des paramètres de dépendance (voir les figures 4.5, 4.6 et 4.7). Par la suite, nous utilisons l'approche AR(1)-CKT dans le contexte de la tarification des options et de la gestion des risques pour modéliser la dépendance dynamique.

Tableau 4.2: Estimation du tau de Kendall conditionnel dynamique à partir des observations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014 selon les différentes approches.

van den Goorbergh <i>et al.</i> (2005), éq.(4.13)			AR(1)-CKT, éq.(4.14)		
Paramètres	Estimés	Écart-types	Paramètres	Estimés	Écart-types
γ_0	1.834	0.224	ω_0	-0.36767	0.094
γ_1	0.123	0.023	ω_1	3.14019	0.136

Tableau 4.3: Moyenne du paramètre θ_t conditionnel dynamique à partir des observations NYSE-NASDAQ du 03/01/2000 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.

Moyenne de θ_t conditionnel dynamique				
Copule	Hist.	Borne inf	Prédit	Borne sup
Clayton	6.001	1.622	5.388	14.555
Gumbel	4.001	1.822410	3.694	8.277
Normale	0.845	0.546	0.853	0.964

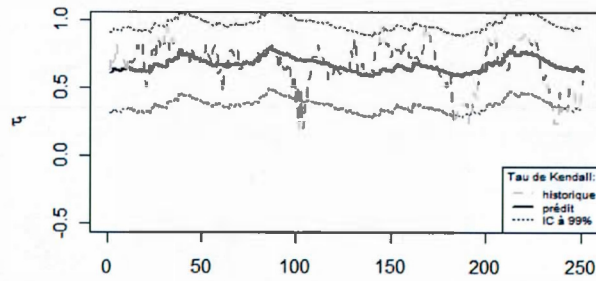


Figure 4.3: Tau de Kendall dynamique entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche de van den Goorbergh *et al.* (2005).

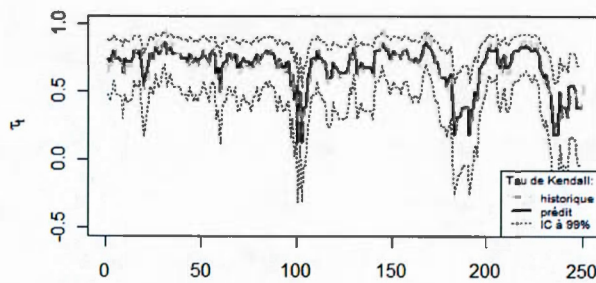


Figure 4.4: Tau de Kendall dynamique entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.

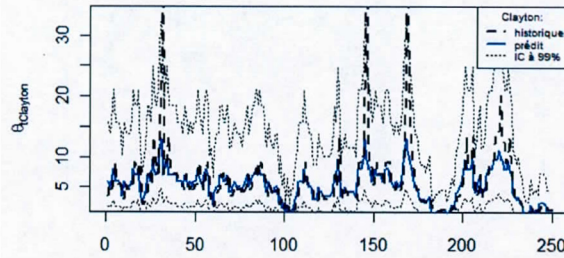


Figure 4.5: Paramètre θ_t de dépendance pour la copule Clayton entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.

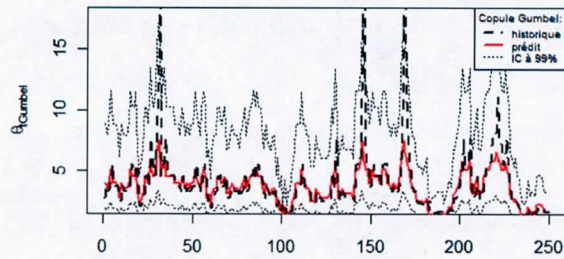


Figure 4.6: Paramètre θ_t de dépendance pour la copule Gumbel entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.

4.3 Tarification des options bivariées

Soit S_{it} le prix du sous-jacent $i = 1, 2$. Alors, sous la mesure risque-neutre Q , la dynamique de S_{iT} à la maturité T est donnée par :

$$S_{iT} = S_{i0} \exp\left(\sum_{t=1}^T y_{it}^Q\right), \quad i = 1, 2. \quad (4.16)$$

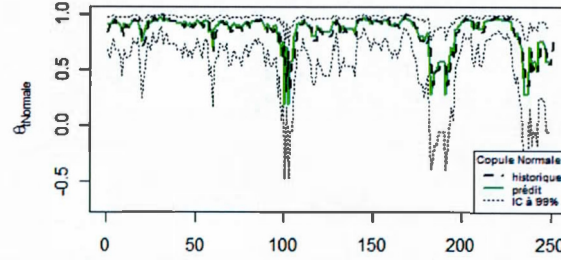


Figure 4.7: Paramètre θ_t de dépendance pour la copule normale entre NYSE-NASDAQ sur 250 jours de marché du 10/12/2013 au 08/12/2014 selon l'approche AR(1)-CKT.

Le principal objectif est d'évaluer les options dont la recette est une fonction $g(S_{1T}, S_{2T})$ de deux actifs financiers (voir van den Goorbergh *et al.* (2005) ; Chiou et Tsay (2008) et Zhang et Guégan (2008)). Dans ce mémoire, nous proposons d'étudier les options dont la recette est définie par :

$$g(S_{1T}, S_{2T}) = \max \{ \chi [(S_{1T} + S_{2T})/2 - K], 0 \}, \quad (4.17)$$

où K est le prix d'exercice de l'option. Nous appelons ces options : option d'achat sur la moyenne (call-on-mean) ou option de vente sur la moyenne (put-on-mean) selon les valeurs de χ

$$\chi = \begin{cases} 1, & \text{pour option d'achat} \\ -1, & \text{pour option de vente.} \end{cases} \quad (4.18)$$

La valeur présente de l'option, sous la mesure neutre au risque Q , à la date t est donnée par :

$$V_t = \exp(-r(T-t)) E^Q [g(S_{1T}, S_{2T}) | \mathcal{F}_t]. \quad (4.19)$$

Proposition 4.1 (*Parité call-put*). *Sous l'hypothèse que les rendements y_{it}^Q suit un modèle GARCH(1,1) sous Q au sens de Duan (1995), avec les innovations z_{it}^* $i = 1, 2$ supposées gaussiennes centrées et réduites, on considère les options définies par :*

$$g(S_{1T}, S_{2T}) = \max \{ \chi [(S_{1T} + S_{2T})/2 - K], 0 \}$$

avec

$$\chi = \begin{cases} 1, & \text{pour option d'achat} \\ -1, & \text{pour option de vente,} \end{cases}$$

où

$$S_{iT} = S_{i0} \exp \left(rT - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^2 + \sum_{t=1}^T \sigma_{it} z_{it}^* \right)$$

est le prix de l'actif $i = 1, 2$. On note le prix du call européen par $Call(T, K)$ et le put européen par $Put(T, K)$ à $t = 0$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} Call(T, K) &= e^{-rT} E^Q [\max(\bar{S}_{12,T} - K, 0) | \mathcal{F}_0], \\ Put(T, K) &= e^{-rT} E^Q [\max(K - \bar{S}_{12,T}, 0) | \mathcal{F}_0], \end{aligned} \quad (4.20)$$

où $\bar{S}_{12,T} = \frac{S_{1T} + S_{2T}}{2}$. Alors, la relation suivante (appelée parité call-put) est vérifiée :

$$Call(T, K) - Put(K, T) = \bar{S}_{12,0} - K e^{-rT}, \quad (4.21)$$

$$\bar{S}_{12,0} = \frac{S_{10} + S_{20}}{2}.$$

Preuve.

Le contrat à terme en position longue (payoff du forward synthétique) peut s'exprimer en fonction du call et put européens :

$$\max(\bar{S}_{12,T} - K, 0) - \max(K - \bar{S}_{12,T}, 0) = \bar{S}_{12,T} - K. \quad (4.22)$$

En multipliant l'équation (4.22) par e^{-rT} , puis en prenant l'espérance conditionnelle sous Q , on obtient :

$$\begin{aligned} e^{-rT} E^Q [\max(\bar{S}_{12,T} - K, 0) | \mathcal{F}_0] &- e^{-rT} E^Q [\max(K - \bar{S}_{12,T}, 0) | \mathcal{F}_0] \\ &= e^{-rT} E^Q [\bar{S}_{12,T} - K | \mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
E^Q[\bar{S}_{12,T}|\mathcal{F}_0] &= \frac{1}{2} \{ E^Q[S_{1T}|\mathcal{F}_0] + E^Q[S_{2,T}|\mathcal{F}_0] \} \\
&= \frac{1}{2} \{ S_{10}e^{rT} + S_{20}e^{rT} \} \\
&= e^{rT} \bar{S}_{12,0}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
e^{-rT} E^Q [\max(\bar{S}_{12,T} - K, 0)|\mathcal{F}_0] &= e^{-rT} E^Q [\max(K - \bar{S}_{12,T}, 0)|\mathcal{F}_0] \\
&= \bar{S}_{12,0} - Ke^{-rT}.
\end{aligned}$$

■

Il est en général impossible d'évaluer l'équation (4.19) analytiquement, on a recours aux méthodes numériques notamment la simulation Monte Carlo sous l'une des approches ci-dessous.

4.3.1 Approche copule-GARCH

Sans perte de généralité, nous considérons l'approche de tarification de Duan (1995) sous le modèle GARH(1,1) afin d'évaluer le prix de l'option définie en (4.17) (voir théorème 1.3 du chapitre 1).

Hypothèse 4.1 Soit $y_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$, sous la mesure neutre au risque Q , on a

$$\begin{aligned}
y_{it}^Q &= r - \frac{1}{2}\sigma_{it}^2 + \epsilon_{it}^*, \\
\epsilon_{it}^* &= \sigma_{it} z_{it}^*, \quad z_{it}^* \sim N(0, 1), \\
\sigma_{it}^2 &= \alpha_{i0} + \alpha_i \sigma_{it-1}^2 (z_{it-1}^* - \lambda)^2 + \beta_i \sigma_{it-1}^2, \quad i = 1, 2;
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{cases} u_{it} = \Phi(z_{it}^*), & i = 1, 2; \\ u_t = (u_{1t}, u_{2t})' \sim C_{\theta_t}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Avec :

— $\theta_t \equiv \theta$ pour tout t , on a la dépendance statique ;

- $\theta_t = \psi_C^{-1}(\tau_t)$ où $\tau_t = L(\omega + \omega_1 \tau_{t-1} + \eta_t)$, avec $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$, on a la dépendance dynamique.

Soient T la maturité de l'option et N la taille de la simulation, nous utilisons la procédure de simulation suivante pour évaluer l'équation (4.19) :

Algorithme 4.1 : Simulation du prix de l'option sous copule-GARCH

Étape 1 : Calibrer les paramètres des modèles GARCH univariés, sous la mesure historique P , ainsi que les paramètres de dépendance θ et θ_t respectivement via l'équation (4.8) et les équations (4.11) et (4.14).

Étape 2 : Si $\theta_t \neq \theta$ alors simuler $\theta_t^{(j)}$ pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$.

Étape 3 : Simuler $(u_{1t}^{(j)}, u_{2t}^{(j)})' \sim C_{\theta_t^{(j)}}$ pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$ à l'aide des algorithmes 2.1, 2.2 et 2.3 introduits au chapitre 2.

Étape 4 : Calculer $z_{it}^{(j)} = \Phi^{-1}(u_{it}^{(j)})$ et $\sigma_{it}^{2(j)} = \alpha_{i0} + \alpha_i \sigma_{it-1}^{2(j)} \left(z_{it-1}^{*(j)} - \lambda \right)^2 + \beta_i \sigma_{it-1}^{2(j)}$, pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$ où la valeur initiale $\sigma_{i0}^2 = \frac{\alpha_{i0}}{1 - \alpha_i - \beta_i}$ (voir van den Goorbergh et al. (2005) et Bernard et Czado (2013)).*

Étape 5 : Simuler le prix à la maturité T , $i = 1, 2$,

$$S_{iT}^{(j)} = S_{i0} \exp \left(rT - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{2(j)} + \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{(j)} z_{it}^{*(j)} \right)$$

pour $j = 1, \dots, N$.

Étape 6 : Calculer le prix l'option :

$$V_0 = \exp(-rT) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(S_{1T}^{(j)}, S_{2T}^{(j)}).$$

4.3.2 Approche DCC-GARCH

Le modèle DCC-GARCH introduit au chapitre 3 induit une notion dépendance dynamique via la corrélation conditionnelle dynamique (voir Engle (2002)). Ainsi dans le cadre de l'évaluation des options bivariés sous l'extension de l'approche de

Duan (1995) pour GARCH à dimensions multiples (voir Rombouts *et al.* (2014)) nous considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2 *Sous la dynamique Q, on a :*

$$\begin{aligned} y_{it}^Q &= r - \frac{1}{2}\sigma_{it}^2 + \epsilon_{it}, \\ \epsilon_{it} &= \sigma_{it}z_{it}^*, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{it}^2 &= \alpha_{i0} + \alpha_i\sigma_{it-1}^2 (z_{it-1}^* - \lambda)^2 + \beta_i\sigma_{it-1}^2, \\ \begin{pmatrix} z_{1t}^* \\ z_{2t}^* \end{pmatrix} &\sim N(0, R_t), \end{aligned} \tag{4.26}$$

où R_t est la matrice de corrélation conditionnelle dynamique définie par

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12t} \\ \rho_{12t} & 1 \end{pmatrix}$$

où le modèle est :

- CCC-GARCH si $\rho_{12t} \equiv \rho_{12}$ pour tout t (voir chapitre 3);
- DCC-GARCH si $\rho_{12t} = \frac{q_{12t}}{\sqrt{q_{11t}q_{22t}}}$ où

$$q_{12t} = \bar{\rho}_{12} + \phi_1(z_{1,t-1}z_{2,t-1} - \bar{\rho}_{12}) + \phi_2(q_{12,t-1} - \bar{\rho}_{12}). \tag{4.27}$$

Algorithme 4.2 : *Simulation du prix de l'option sous CCC/DCC-GARCH*

Étape 1 : Estimer les paramètres, sous la mesure P , des modèles GARCH univariés et de la corrélation conditionnelle dynamique (DCC) via la méthode d'estimation étudiée au chapitre 3 (voir aussi Engle (2002) et Engle (2009)).

Étape 2 : Si $\rho_{12t} \neq \rho_{12}$ simuler $\rho_{12t}^{(j)}$ pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$, grâce à l'algorithme de simulation DCC-GARCH de R Core Team (2015) et calculer

$$R_t^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12t}^{(j)} \\ \rho_{12t}^{(j)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 : Simuler $\begin{pmatrix} z_{1t}^{*(j)} \\ z_{2t}^{*(j)} \end{pmatrix} \sim N(0, R_t^{(j)})$ (voir l'algorithme 2.3 du chapitre 2)
 puis $\sigma_{it}^{2(j)} = \alpha_{i0} + \alpha_i \sigma_{it-1}^{2(j)} (z_{it-1}^{*(j)} - \lambda)^2 + \beta_i \sigma_{it-1}^{2(j)}$ pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$
 où la valeur initiale $\sigma_{i0}^2 = \frac{\alpha_{i0}}{1 - \alpha_i - \beta_i}$ (voir van den Goorbergh et al. (2005) ; Bernard et Czado (2013)).

Étape 4 : Simuler le prix à la maturité T , $i = 1, 2$,

$$S_{iT}^{(j)} = S_{i0} \exp \left(rT - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{2(j)} + \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{(j)} z_{it}^{*(j)} \right)$$

pour $j = 1, \dots, N$.

Étape 5 : Calculer le prix l'option :

$$V_0 = \exp(-rT) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(S_{1T}^{(j)}, S_{2T}^{(j)}).$$

4.3.3 Approche mixte : copule-CCC/DCC-GARCH

Nous étudions une extension de l'approche DCC-GARCH au sens de Engle (2002) dans le but de donner une nouvelle structure à la corrélation dynamique conditionnelle où l'on a affaibli certaines hypothèses de Lee et Long (2009) pour pouvoir appliquer l'approche neutre au risque de Duan (1995). Il s'agit d'exprimer la corrélation au sens de Pearson en fonction des copules : on obtient une corrélation qui n'est plus linéaire appelée pseudo-corrélation par Engle (2009). Sous certaines hypothèses, on a la proposition suivante :

Proposition 4.2 Soient $z_{it} | \mathcal{F}_t \sim F_i(\cdot, \delta_i)$, $i = 1, 2$ telles que $E_{t-1}[z_{it}] = 0$ et $Var_{t-1}(z_{it}) = 1$. On suppose que z_{1t} et z_{2t} sont dépendantes, alors :

$$\begin{aligned} \rho_{12t} &= Corr_{t-1}(z_{1t}, z_{2t}) \\ &= Cov_{t-1}(z_{1t}, z_{2t}) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [C_{\theta_t}(F_1(x, \delta_1), F_2(y, \delta_2)) - F_1(x, \delta_1)F_2(y, \delta_2)] dx dy, \quad (4.28) \end{aligned}$$

où C_{θ_t} la copule associée avec paramètre de dépendance θ_t .

Preuve. La preuve de cette proposition découle du lemme de Hoeffding (corollaire 2.2) et du fait que les innovations sont supposées dépendantes, centrées et de variances égales à 1. ■

Remarque 4.1 Si z_{1t} et z_{2t} sont indépendantes alors, l'équation (4.28) se réduit à $\rho_{12t} \equiv 0$.

Corollaire 4.1 Patton (2013). Soit $z_{it}|\mathcal{F}_t \sim F_i(\cdot, \delta_i)$, $i = 1, 2$ telles que $E_{t-1}[z_{it}] = 0$, $Var_{t-1}(z_{it}) = 1$ et que $u_{it} = F_i(z_{it}, \delta_i)$, on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_{12t} &= Corr_{t-1}(z_{1t}, z_{2t}) \\
 &= E_{t-1}[z_{1t}z_{2t}] \\
 &= E_{t-1}[F_1^{-1}(u_{1t}, \delta_1)F_2^{-1}(u_{2t}, \delta_2)] \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 F_1^{-1}(u, \delta_1)F_2^{-1}(v, \delta_2)c_{\theta_t}(u, v)dudv, \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

où c_{θ_t} est la densité de la copule avec paramètre de dépendance θ_t .

Afin de calculer le prix(4.19) de l'option définie en (4.17), nous considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.3 Sous la dynamique Q , on a :

$$\begin{aligned}
 y_{it}^Q &= r - \frac{1}{2}\sigma_{it}^2 + \epsilon_{it}, \\
 \epsilon_{it} &= \sigma_{it}z_{it}^*, \quad z_{it}^* \sim N(0, 1), \quad i = 1, 2; \\
 \sigma_{it}^2 &= \alpha_{i0} + \alpha_i\sigma_{it-1}^2 (z_{it-1}^* - \lambda)^2 + \beta_i\sigma_{it-1}^2, \\
 \begin{pmatrix} z_{1t}^* \\ z_{2t}^* \end{pmatrix} &\sim N(0, R_t) \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

où R_t est la matrice de corrélation conditionnelle dynamique définie par :

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12t} \\ \rho_{12t} & 1 \end{pmatrix}$$

et où le modèle est :

— Copule-CCC-GARCH si $\theta_t \equiv \theta \Rightarrow \rho_{12t} \equiv \rho_{12}$ pour tout t où

$$\rho_{12} = \int \int_{R^2} [C_\theta(\Phi_1(x), \Phi_2(y)) - \Phi_1(x)\Phi_2(y)] dx dy$$

et où θ est défini par l'équation (4.8) ;

— Copule-DCC-GARCH si $\theta_t \neq \theta \Rightarrow \rho_{12t} \neq \rho_{12}$ pour tout t où

$$\rho_{12t} = \int \int_{R^2} [C_{\theta_t}(\Phi_1(x), \Phi_2(y)) - \Phi_1(x)\Phi_2(y)] dx dy$$

où Φ_1 et Φ_2 fonctions de répartition d'une normale centrée réduite et où θ_t est défini par les équations (4.11) et (4.14).

Sous l'hypothèse 4.3, nous proposons l'algorithme de simulation du prix de l'option donné par (4.19) :

Algorithme 4.3 : Simulation du prix de l'option sous Copule-CCC/DCC-GARCH

Étape 1 : Calibrer les paramètres des modèles GARCH univariés, sous la mesure historique P , ainsi que les paramètres de dépendance θ et θ_t respectivement via l'équation (4.8) et les équations (4.11) et (4.14).

Étape 2 : Si $\theta_t \neq \theta$ alors simuler $\theta_t^{(j)}$, via l'équation (4.14) pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$.

Étape 3 : Simuler $\rho_{12t}^{(j)}$ pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$, grâce à la proposition (4.2) et calculer

$$R_t^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12t}^{(j)} \\ \rho_{12t}^{(j)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape 4 : Simuler $\begin{pmatrix} z_{1t}^{*(j)} \\ z_{2t}^{*(j)} \end{pmatrix} \sim N(0, R_t^{(j)})$ (voir l'algorithme 2.3 du chapitre 2)

puis $\sigma_{it}^{2(j)} = \alpha_{i0} + \alpha_i \sigma_{it-1}^{2(j)} (z_{it-1}^{*(j)} - \lambda)^2 + \beta_i \sigma_{it-1}^{2(j)}$, pour $t = 1, \dots, T$ et $j = 1, \dots, N$ où la valeur initiale $\sigma_{i0}^2 = \frac{\alpha_{i0}}{1-\alpha_i-\beta_i}$ (voir van den Goorbergh et al. (2005) et Bernard et Czado (2013)).

Étape 5 : Simuler le prix à la maturité T , $i = 1, 2$,

$$S_{iT}^{(j)} = S_{i0} \exp \left(rT - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{2(j)} + \sum_{t=1}^T \sigma_{it}^{(j)} z_{it}^{*(j)} \right),$$

pour $j = 1, \dots, N$.

Étape 6 : Calculer le prix l'option :

$$V_0 = \exp(-rT) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(S_{1T}^{(j)}, S_{2T}^{(j)}).$$

4.3.4 Résultats numériques et commentaires

Le modèle GARCH au sens de Bollerslev (1986) est choisi pour calibrer, sous la mesure historique P , les paramètres du modèle GARCH(1,1) avec les rendements des indices NYSE et NASDAQ sur la période du 3 janvier 2000 au 8 décembre 2014, table 4.4. Ainsi, les dynamiques (rendements) historique et risque-neutre suivent l'approche de Duan (1995) où l'on a supposé que les innovations $z_{it}, i = 1, 2$, sont gaussiennes de moyenne nulle et de variance unitaire. Les paramètres associés à la corrélation conditionnelle dynamique au sens de Engle (2002) sont : $\phi_1 = 0.041$ et $\phi_2 = 0.952$ (table 4.5). Les paramètres de dépendance statique (table 4.1) et dynamique au sens des copules sont estimés à l'aide des équations (4.11) et (4.9) où le tau de Kendall conditionnel dynamique est modélisé selon l'approche AR(1)-CKT, voir équation (4.14). Le taux sans risque annuel est fixé à 1% ce qui le rend proche de 0 après normalisation par rapport au nombre de jours de marché (on a pris 252 jours). Les valeurs initiales à la date du 8 décembre

2014 sont 10863.54 pour l'indice NYSE et 4740.69 pour l'indice NASDAQ. Par exemple, le prix d'exercice $K = 7780$ est une valeur autour de la moyenne des valeurs initiales des indices NYSE et NASDAQ à la date du 8 décembre 2014. Nous avons utilisé la simulation Monte Carlo, sous la dynamique risque-neutre à partir des algorithmes 4.1, 4.2 et 4.3 pour 10000 itérations afin de calculer les prix des options sous différentes structures de dépendance (voir les tables 4.7 et 4.8). Les résultats numériques des tables 4.7 et 4.8 et les graphiques renforcent notre intuition et vont dans le sens de la littérature quant à l'impact de la dépendance, en particulier de la dépendance dynamique sur les options bivariées notamment avec le prix de l'option d'achat (call) (voir van den Goorbergh *et al.* (2005) ; Zhang et Guégan (2008) ; Chiou et Tsay (2008) ; Bernard et Czado (2013) et Fengler *et al.* (2012)). À titre d'exemple, le prix de l'option d'achat (call) de maturité $T = 20$ jours et de prix d'exercice (strike) $K = 7780$ est 140.8769 sous l'hypothèse d'indépendance (Indép-GARCH), 181.5174 pour la copule de Gumbel statique sous un modèle GARCH (GS-GARCH) et 183.2507 pour la copule Gumbel dynamique sous un modèle GARCH (GD-GARCH). Ainsi, les écarts entre les prix sous l'hypothèse d'indépendance (Indép-GARCH) et la dépendance statique (GS-GARCH) et dynamique (GD-GARCH) pour la copule de Gumbel reflètent bien la forte dépendance entre les indices NYSE et NASDAQ analysée dans les tables 4.1 et 4.3.

Tableau 4.4: Les paramètres GARCH(1,1) associés aux indices NYSE et NASDAQ sous l'approche de Duan (1995).

Estimateurs GARCH(1,1) approche de Duan (1995)		
Paramètres	NYSE	NASDAQ
α_{0i}	1.603×10^{-6}	1.778×10^{-6}
α_i	8.896×10^{-2}	7.899×10^{-2}
β_i	8.993×10^{-1}	9.143×10^{-1}
λ_i	5.830×10^{-2}	6.249×10^{-2}

Tableau 4.5: Les paramètres CCC et DCC associés aux indices NYSE et NASDAQ au sens de Bollerslev (1990) et Engle (2002).

Paramètres	DCC	CCC
ϕ_1	0.952	—
ϕ_2	0.041	—
ρ_{12}	—	0.806

Tableau 4.6: Sommaire de modèles GARCH bivariés.

Modèles	Description
Copule GARCH	
Indép-GARCH	Copule d'indépendance GARCH
CS-GARCH	Copule de Clayton GARCH avec paramètre statique
CD-GARCH	Copule de Clayton GARCH avec paramètre dynamique
GS-GARCH	Copule de Gumbel GARCH avec paramètre statique
GD-GARCH	Copule de Gumbel GARCH avec paramètre dynamique
NS-GARCH	Copule normale GARCH avec paramètre statique
ND-GARCH	Copule normale GARCH avec paramètre dynamique
CCC/DCC GARCH	
CCC-GARCH	Corrélation conditionnelle constante GARCH
DCC-GARCH	Corrélation Conditionnelle Dynamique GARCH
Copule CCC/DCC GARCH	
CS-CCC-GARCH	Copule de Clayton CCC-GARCH avec paramètre statique
CD-DCC-GARCH	Copule de Clayton DCC-GARCH avec paramètre dynamique
GS-CCC-GARCH	Copule de Gumbel CCC-GARCH avec paramètre statique
GD-DCC-GARCH	Copule de Gumbel DCC-GARCH avec paramètre dynamique
NS-CCC-GARCH	Copule normale CCC-GARCH avec paramètre statique
ND-DCC-GARCH	Copule normale DCC-GARCH avec paramètre dynamique

Tableau 4.7: Prix des options bivariées échéance de 20 jours.

Modèles	Put($T = 20, K = 7780$)	Call($T = 20, K = 7780$)
Copule GARCH		
Indép-GARCH	118.7374	140.8769
CS-GARCH	153.8301	175.9696
CD-GARCH	156.0147	178.1542
GS-GARCH	159.3779	181.5174
GD-GARCH	161.1112	183.2507
NS-GARCH	136.9836	159.1231
ND-GARCH	137.3477	159.4872
CCC/DCC GARCH		
CCC-GARCH	135.9646	158.1041
DCC-GARCH	135.3404	157.4799
Copule CCC/DCC GARCH		
CS-CCC-GARCH	136.0442	158.1837
CD-DCC-GARCH	138.3514	160.4909
GS-CCC-GARCH	136.7831	158.9226
GD-DCC-GARCH	138.7516	160.8911
NS-CCC-GARCH	136.9836	159.1231
ND-DCC-GARCH	138.8463	160.9858

Tableau 4.8: Prix des options bivariées échéance de 30 jours.

Modèles	Put($T = 30, K = 7780$)	Call($T = 30, K = 7780$)
Copule GARCH		
Indép-GARCH	150.2459	172.3977
CS-GARCH	200.1482	222.3000
CD-GARCH	202.7981	224.9499
GS-GARCH	197.8930	220.0448
GD-GARCH	200.1552	222.3070
NS-GARCH	195.1715	217.3233
ND-GARCH	204.6729	226.8247
CCC/DCC GARCH		
CCC-GARCH	189.2873	211.4391
DCC-GARCH	188.8043	210.9561
Copule CCC/DCC GARCH		
CS-CCC-GARCH	189.7305	211.8823
CD-DCC-GARCH	202.3626	224.5144
GS-CCC-GARCH	193.9729	216.1247
GD-DCC-GARCH	207.9427	230.0945
NS-CCC-GARCH	195.1715	217.3233
ND-DCC-GARCH	209.6761	231.8279

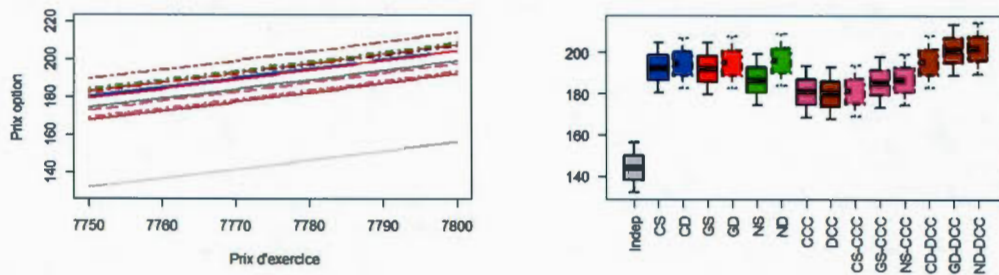


Figure 4.8: Prix de l'option de vente (put) d'échéance 30 jours en fonction du prix d'exercice sous différentes approches de dépendance.

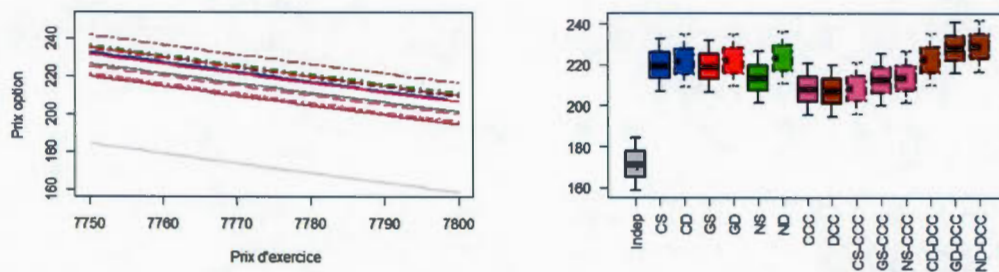


Figure 4.9: Prix de l'option d'achat (call) d'échéance 30 jours en fonction du prix d'exercice sous différentes approches de dépendance.

CHAPITRE V

MODÉLISATION DES MESURES DE RISQUE DYNAMIQUES AVEC MODÈLES GARCH

Ce chapitre est consacré à la gestion des risques financiers à travers des mesures de risque standards : Bêta, VaR et TVaR. À ce titre, ces mesures de risque sont utilisées par les opérateurs de marché pour la gestion quotidienne de leurs positions. Comme au chapitre 4, nous appliquons le concept de dépendance dynamique sous GARCH aux différentes mesures. Ce chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section, nous étudions le coefficient de risque bêta conditionnel dans le cadre dynamique (voir Engle (2009)) ainsi qu'une extension à la théorie des copules. Une analyse des actions individuelles par rapport à la dynamique du marché de référence y est abordée. On étudie dans la deuxième section les mesures de risque VaR et TVaR reliées au portefeuille dynamique sous les hypothèses 4.1, 4.2 et 4.3 de la dépendance dynamique introduites au chapitre 4.

5.1 Coefficient bêta

5.1.1 Définitions et généralités

On considère le modèle d'évaluation des actifs financiers à un facteur (en anglais CAPM) basé sur la relation entre le risque individuel et la dynamique du marché.

On suppose que ce modèle est défini par :

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_i y_{mt} + \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (5.1)$$

avec :

- y_{it} : le rendement de l'action i à la date t ;
- y_{mt} : le rendement du marché de référence (« benchmark »);
- α_i : est vu comme le taux sans risque en théorie proche de 0 condition de l'efficience du marché (voir Zapatero et Cvitanic (2004); Engle (2009); Adrian et Franzoni (2009));
- si $\alpha_i > 0$: le prix de l'action i est sous-évalué et ;
- si $\alpha_i < 0$: le prix de l'action i est sur-évalué. α_i est aussi appelé l'indice de Jensen (voir Zapatero et Cvitanic (2004));
- β_i : représente le facteur de risque influençant le rendement de l'action individuelle. Il est supposé capter le risque spécifique de chaque action (voir Cougnaud (2007)).

En général, l'estimation du coefficient β_i peut être effectuée grâce à la méthode de régression basée sur les séries historiques (voir Zivot et Wang (2003)). Cette méthode peut s'avérer problématique si les données manquent de profondeur. Cependant, une approche conditionnelle via les modèles GARCH peut être utile en tenant compte de la corrélation conditionnelle entre le rendement de l'action individuelle et le rendement du marché de référence. À ce titre, nous proposons d'étendre la modélisation du coefficient β_i à la dépendance dynamique induite par les copules.

L'équation (5.1) conduit à :

$$\begin{cases} V(y_{it}) = \beta_i^2 V(y_{mt}) + V(\eta_{it}), \\ Cov(y_{it}, y_{jt}) = \beta_i \beta_j V(y_{mt}), \end{cases} \quad (5.2)$$

où les indices i, j représentent les actions individuelles et m le marché de référence (voir Engle (2009)). Par conséquent, la corrélation entre deux actions i et j cotées sur le marché de référence m peut s'exprimer par :

$$\rho_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j V(y_{mt})}{\sqrt{(\beta_i^2 V(y_{mt}) + V(\eta_{it})) (\beta_j^2 V(y_{mt}) + V(\eta_{jt}))}}. \quad (5.3)$$

5.1.2 Bêta conditionnel dynamique

On note le coefficient bêta conditionnel pour l'action i à la date t par β_{it} . La version dynamique de l'équation (5.3) est donnée par :

$$\rho_{ijt} = \frac{\beta_{it} \beta_{jt} V_{t-1}(y_{mt})}{\sqrt{(\beta_i^2 V_{t-1}(y_{mt}) + V(\eta_{it})) (\beta_j^2 V_{t-1}(y_{mt}) + V(\eta_{jt}))}}. \quad (5.4)$$

Théorème 5.1 (voir Engle (2009)). *On suppose que les rendements $y_{it} \sim GARCH$ et $y_{mt} \sim GARCH$ tels que $V_{t-1}(y_{i,t}) = \sigma_{it}^2$ et $V_{t-1}(y_{mt}) = \sigma_{mt}^2$. Alors, le coefficient bêta conditionnel est donné par :*

$$\beta_{it} = \rho_{imt} \left(\frac{\sigma_{it}}{\sigma_{mt}} \right), \quad (5.5)$$

avec ρ_{imt} la corrélation conditionnelle entre l'action i et le marché de référence m .

Hypothèse 5.1 *On peut supposer que :*

1. $\rho_{imt} \sim CCC$ par Bollerslev (1990) (voir chapitre 3) telle que

$$\rho_{imt} = \bar{\rho}_{im};$$

2. $\rho_{imt} \sim DCC$ par Engle (2002) (voir chapitre 3) telle que

$$\rho_{imt} = \frac{q_{imt}}{\sqrt{q_{iit} q_{mmt}}} \text{ avec}$$

$$q_{imt} = \bar{\rho}_{im} + \phi_1(z_{i,t-1} z_{m,t-1} - \bar{\rho}_{im}) + \phi_2(q_{im,t-1} - \bar{\rho}_{im}). \quad (5.6)$$

Preuve. : (théorème 5.1). Par les équations (5.1) et (5.2), on a :

$$\begin{aligned}
 \beta_{it} &= \frac{Cov_{t-1}(y_{it}, y_{mt})}{V_{t-1}(y_{mt})} \\
 &= \frac{\rho_{imt} [V_{t-1}(y_{it}) V_{t-1}(y_{mt})]^{0.5}}{V_{t-1}(y_{mt})} \\
 &= \rho_{imt} \left(\frac{V_{t-1}(y_{it})}{V_{t-1}(y_{mt})} \right)^{0.5} \\
 &= \rho_{imt} \left(\frac{\sigma_{it}}{\sigma_{mt}} \right).
 \end{aligned}$$

■

Lemme 5.2 Soient X et Y deux variables aléatoires et soient

$$X^* = a + bX,$$

$$Y^* = c + dY.$$

Alors, $Corr(X^*, Y^*) = Corr(X, Y)$.

Preuve. On a :

$$— Cov(X^*, Y^*) = bdCov(X, Y);$$

$$— V(X^*) = b^2V(X);$$

$$— V(Y^*) = d^2V(Y). \text{ Alors,}$$

$$\begin{aligned}
 Corr(X^*, Y^*) &= \frac{bdCov(X, Y)}{\sqrt{b^2V(X)}\sqrt{d^2V(Y)}} \\
 &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \\
 &= Corr(X, Y).
 \end{aligned}$$

■

À l'image du chapitre 4, nous proposons une nouvelle dynamique du coefficient bêta conditionnel basée sur les copules par le théorème suivant :

Théorème 5.3 *On suppose que les rendements $y_{it} \sim GARCH$ et $y_{mt} \sim GARCH$ tels que $V_{t-1}(y_{i,t}) = \sigma_{it}^2$ et $V_{t-1}(y_{mt}) = \sigma_{mt}^2$. De plus, on suppose que les innovations $z_{it} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $z_{mt} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ associées respectivement à y_{it} et y_{mt} sont dépendantes. Alors, le coefficient bêta conditionnel est donné par :*

$$\beta_{it} = \pi_{im}(\theta_t) \left(\frac{\sigma_{it}}{\sigma_{mt}} \right). \quad (5.7)$$

avec $\pi_{im}(\theta_t) = \rho_{imt} := \text{Corr}_{t-1}(y_{it}, y_{mt})$ la corrélation conditionnelle entre l'action i et le marché de référence m et où $\pi_{im}(\theta_t)$ est définie par

$$\pi_{im}(\theta_t) := \text{Cov}_{t-1}(z_{i,t}, z_{mt}) = \int \int_{\mathbb{R}^2} [C_{\theta_t}(F_i(x), F_m(y)) - F_i(x)F_m(y)] dx dy$$

où θ_t est un paramètre de dépendance dynamique et où F_i et F_m sont les fonctions de répartition de z_{it} et z_{mt} respectivement.

Preuve. Comme $y_{it} \sim GARCH$ et $y_{mt} \sim GARCH$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y_{it} &= \tilde{\mu}_{it} + \sigma_{it} z_{it}, & z_{it} &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ y_{mt} &= \tilde{\mu}_{mt} + \sigma_{mt} z_{mt}, & z_{mt} &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Par le lemme 5.2, on obtient :

$$\rho_{imt} := \text{Corr}_{t-1}(y_{it}, y_{mt}) = \text{Corr}_{t-1}(z_{it}, z_{mt}) = \text{Cov}_{t-1}(z_{it}, z_{mt}) := \pi_{im}(\theta_t).$$

■

Hypothèse 5.2 *On choisit la dynamique de θ_t telle que définie par les équations (4.11) et (4.14).*

5.2 Analyses du coefficient bêta

Le coefficient bêta est une mesure de sensibilité pour le couple risque/rendement d'une action individuelle par rapport au mouvement du marché. Il mesure la

contribution marginale de l'action individuelle sur le risque de l'indice de référence. L'expression du bêta définie par les théorèmes 5.1 et 5.3 montre que le bêta est proportionnel à la corrélation entre l'action individuelle et l'indice de référence.

Remarque 5.1 *On a :*

— $-1 \leq \rho_{imt} \leq 1$ alors

$$-\frac{\sigma_{it}}{\sigma_{mt}} \leq \beta_{it} \leq \frac{\sigma_{it}}{\sigma_{mt}}. \quad (5.8)$$

— La prévision du coefficient bêta à la période $t+1$ sachant l'information disponible à la période t est donnée par l'équation :

$$\beta_{i,t+1|t} = \rho_{im,t+1|t} \frac{\sigma_{i,t+1|t}}{\sigma_{m,t+1|t}}, \quad (5.9)$$

ou par l'équation :

$$\beta_{i,t+1|t} = \pi_{im}(\theta_{t+1|t}) \frac{\sigma_{i,t+1|t}}{\sigma_{m,t+1|t}}. \quad (5.10)$$

Les conséquences de la remarque 5.1 sont :

- si β_{it} est proche de 1, la volatilité de l'action individuelle est proche de celle du marché de référence à la date t ;
- si β_{it} est supérieur à 1, l'action individuelle est plus volatile que la dynamique du marché de référence à la date t ;
- si β_{it} est inférieur à 1, l'action individuelle est moins volatile que la dynamique du marché de référence à la date t et ;
- si β_{it} est négatif, l'action individuelle et la dynamique du marché de référence sont corrélées négativement.

En pratique, la plupart des investisseurs s'intéressent au coefficient bêta pour diversifier le portefeuille ou pour évaluer le coût du capital. Ainsi, un portefeuille

diversifié investi dans des actions avec un bêta égal à 2 est deux fois plus risqué qu'un portefeuille diversifié avec un bêta égal à 1 (voir Brealey *et al.* (2011)). Cependant, il n'existe pas une méthode unique pour déterminer le bêta d'autant que certains intervenants s'appuient sur les bêtas estimés par des agences de notation à l'instar de Standard and Poor's ou Moody's qui ont des recettes internes pour calculer le bêta. Toutefois, la littérature économétrique est aussi variée autour de la question avec notamment Engle (2009) ; Adrian et Franzoni (2009) ; Lewellen et Nagel (2006).

5.2.1 Analyse du bêta de l'action de Boeing sur l'indice NYSE

Les bêtas calculés via la méthode de régression pour les différentes sous-périodes (voir table 5.1) montrent la variabilité du bêta au cours du temps. Donc, l'approche dynamique du bêta est plus réaliste comme fut la corrélation dynamique. Et, les graphiques des bêtas conditionnels dynamiques avec la méthode CCC/DCC-GARCH et Copule-CCC/DCC-GARCH vont dans ce sens. La nouvelle méthode, c'est-à-dire bêtas estimés avec copule-CCC/DCC-GARCH permet de détecter facilement si bêta est autour de 0 voire même négatif dans certains cas. Tandis que la méthode avec CCC/DCC-GARCH donnent toujours des bêtas strictement positifs dans l'exemple que nous avons pris.

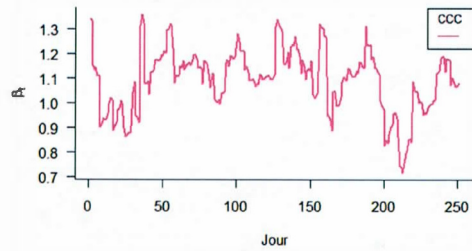


Figure 5.1: Bêta CCC-GARCH :
Boeing vs NYSE

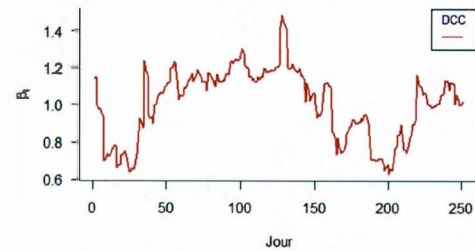


Figure 5.2: Bêta DCC-GARCH :
Boeing vs NYSE

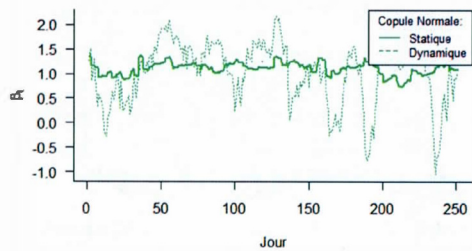


Figure 5.3: Bêta copule normale
CCC/DCC GARCH : Boeing vs
NYSE

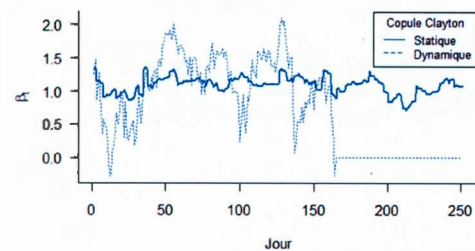


Figure 5.4: Bêta copule de
Clayton CCC/DCC GARCH :
Boeing vs NYSE

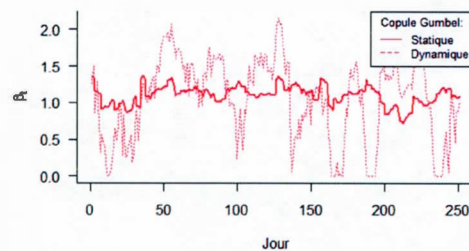


Figure 5.5: Bêta copule de Gum-
bel CCC/DCC GARCH : Boeing
vs NYSE

Tableau 5.1: Estimation du bêta journalier et intervalle de confiance à 95% par la méthode de régression de la compagnie Boeing sur l'indice NYSE.

Période	Méthode de régression		
	Bêta	IC à 95%	Corr(Boeing, NYSE)
03 Janv. 2000 au 08 Déc. 2014	0.956	[0.917 ; 0.995]	0.618
04 Janv. 2010 au 08 Déc. 2014	1.053	[0.998 ; 1.109]	0.726
03 Janv. 2012 au 08 Déc. 2014	0.979	[0.884 ; 1.075]	0.594
10 Déc. 2013 au 08 Déc. 2014	1.055	[0.878 ; 1.233]	0.595

Tableau 5.2: Statistiques du bêta conditionnel journalier de la compagnie Boeing sur l'indice NYSE du 10/12/2013 au 08/12/2014.

Méthode	β_t conditionnel		
	Minimum	Maximum	Moyenne
CCC/DCC GARCH			
CCC	0.717	1.093	1.481
DCC	0.625	1.005	0.974
Copule CCC-GARCH			
Clayton statique	0.712	1.352	1.086
Gumbel statique	0.722	1.371	1.102
Normale statique	0.722	1.372	1.102
Copule DCC-GARCH			
Clayton dynamique	-0.284	2.091	0.726
Gumbel dynamique	0.000	2.155	1.042
Normale dynamique	-1.055	2.165	1.012

5.3 VaR et TVaR conditionnelles dynamiques

La régulation financière, suite aux accords du comité de Bâle, a rendu les mesures de risque à l'instar de la VaR incontournables et populaires auprès des intervenants du marché financier. Nous allons donner la définition formelle de la VaR : Valeur à risque (en anglais : Value-at-Risk) et TVaR (en anglais : Tail-Value-at Risk) (voir Marceau (2013)) ainsi que les propriétés d'une mesure cohérente de risque au sens de Artzner *et al.* (1999).

5.3.1 Définitions et propriétés

Définition 5.1 . Soit $\kappa \in (0, 1)$. La VaR avec un niveau de confiance κ associée au processus X_t est définie par :

$$VaR(X_t; \kappa) = F_{X_t}^{-1}(\kappa), \quad t = 0, \dots, T; \quad (5.11)$$

où $F_{X_t}^{-1}$ est la fonction de répartition inverse de la distribution conditionnelle de X_t .

La VaR n'est pas une mesure cohérente de risque au sens de Artzner *et al.* (1999). En effet, la VaR fournit une information locale de la queue de distribution et ne fournit pas d'information sur l'épaisseur de la queue (voir Marceau (2013)). Une mesure cohérente de risque en remplacement de la VaR est donnée par :

Définition 5.2 Soit $\kappa \in (0, 1)$. La TVaR avec un niveau de confiance κ associée au processus X_t est définie par :

$$TVaR(X_t; \kappa) = \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\kappa}^1 VaR(X_t; s) ds, \quad t = 0, \dots, T. \quad (5.12)$$

La TVaR est la VaR moyenne pour des niveaux de risque supérieurs à κ . La TVaR est aussi appelée « Expected Shortfall » dans la littérature financière. Cependant,

la TVaR a la réputation d'être une mesure cohérente de risque (voir Jondeau *et al.* (2007) ; chapitre 8) :

Définition 5.3 Soit \mathcal{E} l'espace de variables réelles. La fonction ρ , définie sur \mathcal{E} à valeurs réelles \mathcal{R} , est une mesure cohérente de risque si elle est :

- (i) invariante par translation : $X \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathcal{R}$, alors $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$;
- (ii) sous-additive : $X, Y \in \mathcal{E}$, alors $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$;
- (iii) positivement homogène : $X \in \mathcal{E}$, $\lambda \geq 0$, alors $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$;
- (iv) monotone : $X, Y \in \mathcal{E}$, avec $X \leq Y$, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

5.3.2 Gestion des risques du portefeuille

Il existe plusieurs approches en matière de gestion des risques du portefeuille basées soit sur les rendements des actifs ou soit sur les prix des actifs financiers (voir Chiou et Tsay (2008) et Patton (2013)). L'approche développée dans cette section est basée sur les prix des actifs financiers d'autant que les prix sont supposés toujours positifs ce qui offre à la fois une vision actuarielle et financière de la quantification du risque associé au portefeuille (voir Haugh (2004)).

Considerons $S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{Nt}$ les prix de N actions à la date t . Un investisseur décide de construire un portefeuille d'actions à la date t en investissant $p_i, i = 1, \dots, N$ unités dans chaque actif. On note W_t , la richesse de l'investisseur à la date t définie par :

$$\begin{cases} W_t = \sum_{i=1}^N p_i S_{it}, & t = 0, \dots, T; \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1, \end{cases} \quad (5.13)$$

où T est l'horizon d'investissement. Définissons R_t par :

$$R_t = \frac{W_t}{W_0}, \quad t = 0, \dots, T; \quad (5.14)$$

où W_0 est la richesse initiale de l'investisseur. Pour un horizon d'investissement T , on a :

- si $R_T \leq 1$, la valeur du portefeuille diminue car la richesse initiale est supérieure à la richesse finale, donc l'investisseur s'appauvrit ;
- si $R_T > 1$, la valeur du portefeuille augmente car la richesse initiale est inférieure à la richesse finale, donc l'investisseur fait des gains.

Afin de quantifier en termes probabilistes, on s'intéresse à l'évènement :

$$\Theta_T^{(\alpha)} := \{R_T \leq 1 - \alpha\}. \quad (5.15)$$

Ainsi, la probabilité que le portefeuille perd plus de $\alpha\%$ de sa valeur (voir Haugh (2004)) est donnée par $P_r(\Theta_T^{(\alpha)}) = E \left[I_{\Theta_T^{(\alpha)}} \right]$ où

$$I_{\Theta_T^{(\alpha)}} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_T \leq 1 - \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.16)$$

De manière équivalente, on définit la variable aléatoire Lr_T (la perte en pourcentage de la valeur du portefeuille à l'horizon T) par

$$Lr_T = R_0 - R_T. \quad (5.17)$$

telle que

- $Lr_T \geq 0 \Leftrightarrow R_T \leq R_0 \Leftrightarrow R_T \leq 1$;
- $Lr_T < 0 \Leftrightarrow R_T > R_0 \Leftrightarrow R_T > 1$.

Ainsi, on s'intéresse aux mesures de risque $VaR(Lr_T; \kappa)$ et $TVaR(Lr_T; \kappa)$ pour un seuil $\kappa \in (0, 1)$ afin de quantifier le niveau des gains ou pertes du portefeuille. Mais Lr_T et R_T sont des fonctions de S_{1T}, \dots, S_{NT} . Il faut donc des hypothèses supplémentaires sur $S_{iT}, i = 1, \dots, N$ afin de déterminer leur distribution éventuelle.

5.3.3 Exemples numériques et interprétation des résultats

Un investisseur investit à $t = 0$ $p_1 = 0.5$ dans l'indice *NASDAQ* et $p_2 = 0.5$ dans l'indice NYSE la valeur initiale du portefeuille est

$$W_0 = p_1 S_{NASDAQ,0} + p_2 S_{NYSE,0},$$

avec $S_{NYSE,0} = 10863.54$ et $S_{NASDAQ,0} = 4740.69$ au 8 décembre 2014 soit $W_0 = 7802.115$ et la richesse finale à l'horizon $T = 30$ jours est

$$W_T = p_1 S_{NASDAQ,T} + p_2 S_{NYSE,T},$$

où on définit le rapport $R_T = \frac{W_T}{W_0}$ et $Lr_T = R_0 - R_T$.

Hypothèse 5.3 On suppose que $S_{NASDAQ,T} \sim GARCH(1,1)$ et $S_{NYSE,T} \sim GARCH(1,1)$ au sens de l'équation (4.16) et des hypothèses 4.1, 4.2 et 4.3.

Le but est d'évaluer par simulation les mesures de risque $VaR(Lr_T; \kappa)$ et $TVaR(Lr_T; \kappa)$ pour un seuil $\kappa \in (0, 1)$ sous l'hypothèse 5.3. La distribution explicite de Lr_T est très difficile à trouver dans le contexte de GARCH. Donc nous procédons par simulation Monte Carlo grâce aux algorithmes de simulation introduits aux chapitres 2 et 4.

Comme pour les options au chapitre 4, l'impact de la dépendance est visible avec notamment :

- la probabilité de perte de 1% de la valeur du portefeuille dans 30 jours se situant à $Pr\left(\Theta_{30}^{(1\%)}\right) = 0.4284$ sous l'hypothèse d'indépendance GARCH (Indép-GARCH) contre $Pr\left(\Theta_{30}^{(1\%)}\right) = 0.4458$ pour la copule Normale statique GARCH (NS-GARCH) et $Pr\left(\Theta_{30}^{(1\%)}\right) = 0.4477$ pour la copule normale dynamique (ND-GARCH) (voir table 5.3) ;
- la $VaR(Lr_{30}; 0.99) = 12.62\%$, sous l'hypothèse d'indépendance GARCH, s'interprétant comme avec 1% de chance, la richesse initiale baisse de 12.62%

(984.63) dans 30 jours, contre $VaR(Lr_{30}; 0.99) = 15.34\%$ pour la copule normale statique GARCH (NS-GARCH) et $VaR(Lr_{30}; 0.99) = 15.72\%$ pour la copule normale dynamique (ND-GARCH) (voir table 5.4) ;

- la $TVaR(Lr_T; \kappa)$, sous l'hypothèse de la dépendance dynamique, majore globalement la dépendance statique quelle que soit la copule choisie (voir table 5.4).

Ces résultats nous rassurent en ce sens que la TVaR est une mesure cohérente de risque.

Tableau 5.3: Probabilité de perte de plus de $\alpha\%$ de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).

Modèles	Probabilité de perte : $Pr\left(\Theta_T^{(\alpha\%)}\right)$		
	$Pr\left(\Theta_{30}^{(10\%)}\right)$	$Pr\left(\Theta_{30}^{(5\%)}\right)$	$Pr\left(\Theta_{30}^{(1\%)}\right)$
Copule GARCH			
Indép-GARCH	0.0302	0.1567	0.4284
CS-GARCH	0.0674	0.2186	0.4432
CD-GARCH	0.0702	0.2230	0.4453
GS-GARCH	0.0721	0.2284	0.4576
GD-GARCH	0.0758	0.2305	0.4562
NS-GARCH	0.0544	0.1989	0.4458
ND-GARCH	0.0574	0.2011	0.4477
CCC/DCC GARCH			
CCC-GARCH	0.0514	0.1948	0.4444
DCC-GARCH	0.0507	0.1929	0.4446
Copule CCC/DCC GARCH			
CS-CCC-GARCH	0.0514	0.1953	0.4444
CD-DCC-GARCH	0.0556	0.1992	0.4464
GS-CCC-GARCH	0.0537	0.1984	0.4448
GD-DCC-GARCH	0.0570	0.2012	0.4469
NS-CCC-GARCH	0.0544	0.1989	0.4458
ND-DCC-GARCH	0.0572	0.2023	0.4481

Tableau 5.4: Valeur à risque (Value-at-Risk) sur la perte en pourcentage de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).

Value-at-Risk : $Var(Lr_T; \kappa)$					
$Var(Lr_{30}; \kappa)$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 0.80$	$\kappa = 0.90$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = 0.99$
Copule GARCH					
Indép-GARCH	0.09%	4.21%	6.52%	8.63%	12.62%
CS-GARCH	0.07%	5.39%	8.45%	11.26%	17.06%
CD-GARCH	0.09%	5.51%	8.51%	11.33%	17.29%
GS-GARCH	0.31%	5.65%	8.62%	11.49%	17.07%
GD-GARCH	0.29%	5.71%	8.75%	11.70%	17.25%
NS-GARCH	0.30%	4.97%	7.78%	10.27%	15.34%
ND-GARCH	0.33%	5.02%	7.94%	10.53%	15.72%
CCC/DCC GARCH					
CCC-GARCH	0.27%	4.90%	7.70%	10.08%	15.05%
DCC-GARCH	0.25%	4.88%	7.67%	10.06%	14.87%
Copule CCC/DCC GARCH					
CS-CCC-GARCH	0.27%	4.91%	7.71%	10.10%	15.05%
CD-DCC-GARCH	0.30%	4.99%	7.77%	10.34%	15.42%
GS-CCC-GARCH	0.30%	4.96%	7.78%	10.21%	15.25%
GD-DCC-GARCH	0.30%	5.02%	7.87%	10.47%	15.71%
NS-CCC-GARCH	0.30%	4.97%	7.78%	10.27%	15.34%
ND-DCC-GARCH	0.31%	5.05%	7.93%	10.52%	15.76%

Tableau 5.5: « Tail Value-at-Risk » sur la perte en pourcentage de la valeur du portefeuille sur un horizon de 30 jours sous différentes structures de dépendance via GARCH(1,1).

Tail Value-at-Risk : $TVaR(Lr_T; \kappa)$					
$TVaR(Lr_{30}; \kappa)$	$\kappa = 0.50$	$\kappa = 0.80$	$\kappa = 0.90$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = 0.99$
Copule GARCH					
Indép-GARCH	4.14%	7.26%	9.30%	11.13%	14.97%
CS-GARCH	5.35%	9.52%	12.24%	14.78%	19.93%
CD-GARCH	5.42%	9.62%	12.35%	14.91%	20.23%
GS-GARCH	5.59%	9.75%	12.52%	15.11%	20.94%
GD-GARCH	5.66%	9.90%	12.71%	15.35%	21.26%
NS-GARCH	4.94%	8.66%	11.10%	13.31%	18.01%
ND-GARCH	5.04%	8.87%	11.40%	13.71%	18.58%
CCC/DCC GARCH					
CCC-GARCH	4.87%	8.53%	10.91%	13.05%	17.67%
DCC-GARCH	4.85%	8.50%	10.89%	13.05%	17.65%
Copule CCC/DCC GARCH					
CS-CCC-GARCH	4.87%	8.54%	10.92%	13.07%	17.69%
CD-DCC-GARCH	4.97%	8.71%	11.18%	13.42%	18.16%
GS-CCC-GARCH	4.93%	8.64%	11.06%	13.26%	17.95%
GD-DCC-GARCH	5.02%	8.82%	11.34%	13.63%	18.44%
NS-CCC-GARCH	4.94%	8.66%	11.10%	13.31%	18.01%
ND-DCC-GARCH	5.04%	8.85%	11.38%	13.68%	18.49%

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes penchés sur l'évaluation des produits dérivés et la gestion des risques financiers sous la dépendance : statique et dynamique. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur deux approches statistiques représentées par la notion de corrélation au sens de Engle (2002) et la notion de copule au sens de Sklar (1959).

Aux chapitres 1, 2 et 3, nous avons étudié un cadre théorique avec quelques illustrations à l'appui permettant de saisir la problématique de la dépendance pour les séries financières.

Au chapitre 4, nous avons étudié et développé une approche dynamique de la modélisation de la dépendance en rapprochant deux visions celle de van den Goorbergh *et al.* (2005); Chiou et Tsay (2008) et celle de Patton (2006) et Patton (2013). La première est basée sur la modélisation de la dépendance via le tau de Kendall τ_t avec la méthode de régression dont les régresseurs sont les variances conditionnelles sous un modèle GARCH et la seconde basée directement sur une approche autorégressive des paramètres θ_t des copules au cas par cas. Notre premier objectif a donc consisté à montrer que l'on peut généraliser les deux concepts d'autant que les avantages associés à l'approche de Patton (2006) et Patton (2013) permettent de contrôler les supports des paramètres θ_t de la dépendance pour une copule donnée et les avantages associés à l'approche de van den Goorbergh *et al.* (2005) permettent d'utiliser la relation entre le tau de Kendall τ_t et les paramètres de dépendance θ_t pour une copule donnée afin de retrouver la dynamique de θ_t . À cette fin, nous avons introduit le modèle AR(p)-CKT Autoregressive Conditional

Kendall's tau : tau de Kendall autorégressif conditionnel d'ordre p . Et, nous avons observé que ce modèle, en plus de permettre au tau de Kendall τ_t d'être compris entre -1 et 1 , donne une meilleure prévision du tau Kendall. Notre second objectif a été d'étendre la notion de pseudo-corrélation conditionnelle (*DCC – GARCH*) introduite par Engle (2002) aux copules. Nous nous sommes inspirés de l'approche de Lee et Long (2009) avec des hypothèses supplémentaires pour permettre l'application aisée de la tarification des options sous la probabilité neutre au risque avec l'approche de Duan (1995) (voir proposition 4.2). Ensuite, nous avons adapté et développé des algorithmes de simulation par rapport au nouveau contexte de modélisation décrit ci-dessus (voir algorithmes 4.1, 4.2 et 4.3). Ainsi, les résultats obtenus sur la tarification des options (call et put) étudiées dans ce mémoire dont les sous-jacents sont les indices boursiers américains NYSE et NASDAQ montrent bien la pertinence de l'utilisation de l'approche de la dépendance dynamique reflétant bien la réalité pour les séries financières. Cependant, la corrélation linéaire au sens de Pearson n'étant pas une mesure de dépendance au sens fort, alors nous nous sommes intéressés à la notion de pseudo-corrélation au sens de Engle (2002) qui ne nous a pas permis de marquer la différence sur les prix des options quant à l'impact de la modélisation de la corrélation avec CCC-GARCH de Bollerslev (1990) et DCC-GARCH de Engle (2002). C'est une des raisons pour lesquelles nous avons étudié des pseudo-corrélations en fonction des copules (proposition 4.2) pour marquer cette différence dans les prix des options étudiées.

Au chapitre 5, nous nous sommes intéressés aux outils standards de mesures de risque en finance avec une approche dynamique. Par la suite, la notion de pseudo-corrélation au sens de Engle (2002) a été étendue aux copules ici aussi lors de l'étude du coefficient bêta conditionnel (théorème 5.3). Nous avons remarqué que l'approche dynamique du coefficient bêta β_t (voir table 5.2) est plus réaliste que la méthode traditionnelle incarnée par la méthode de régression (voir table 5.1). De

plus, une gestion dynamique du portefeuille d'actifs (indices NYSE et NASDAQ) nous a permis d'étudier le risque financier relié à la détention d'un tel portefeuille (car les indices NYSE et NASDAQ sont fortement dépendants, voir figure 4.2). Ainsi, les mesures de risque VaR et TVaR nous ont permis de quantifier ce risque avec une différence nette entre la dépendance statique et dynamique (voir les tables 5.4 et 5.4).

Cependant, les limites de l'approche de la modélisation de la dépendance dynamique via le tau de Kendall peuvent se manifester très rapidement lorsque l'on s'intéresse à plus de deux actifs financiers. En perspective, il faut penser également à étendre ces concepts aux copules bivariés et multivariés avec plusieurs paramètres de dépendance $\theta_{1t}, \dots, \theta_{Nt}$.

APPENDICE A

PREUVE DU THÉORÈME DE DUAN

Preuve. (théorème 1.3). Comme $\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}$ suit une distribution lognormale sous la mesure risque-neutre Q , alors on a :

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \mu_t^* + \epsilon_t^*, \quad (\text{A.1})$$

où μ_t^* est la moyenne conditionnelle et ϵ_t^* suit une distribution normale sous la mesure risque-neutre Q . D'abord, on cherche à prouver que $\mu_t^* = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2$. En effet,

$$\begin{aligned} E_{t-1}^Q \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \right] &= E_{t-1}^Q [e^{\mu_t^* + \epsilon_t^*}] \\ &= e^{\mu_t^* + \sigma_t^2/2}, \end{aligned}$$

où $\sigma_t^2 = \text{Var}_{t-1}^P \left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \right) = \text{Var}_{t-1}^Q \left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \right)$ d'après la définition 1.2. De même, $E_{t-1}^Q \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \right] = e^r$, il s'ensuit que $\mu_t^* = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2$. En égalisant les équations (1.12) et (A.1), on a : $r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \epsilon_t^*$. On en déduit que $\epsilon_t = \epsilon_t^* - \lambda\sigma_t$. En remplaçant ϵ_t dans l'équation de la variance conditionnelle, on obtient le résultat souhaité. ■

APPENDICE B

DESCRIPTION ET EXEMPLES DES COPULES DE DIMENSION 2

Cette section de l'appendice s'appuie sur les ouvrages suivants : Nelsen (2006), Joe (1997) et Embrechts *et al.* (2003). Cependant, certaines propriétés sont spécifiques aux copules de la famille archimédienne. La copule normale ne fait pas partie de cette famille.

Tableau B.1: Fonction de répartition pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.

Copule	$C_\theta(u_1, u_2)$
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$
Gumbel	$\exp \left[- \left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta \right)^{1/\theta} \right]$
Normale	$\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta}} \exp \left(-\frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{2(1-\theta^2)} \right) dx dy$

Tableau B.2: Fonction de densité pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.

Copule	$c_\theta(u_1, u_2)$
Clayton	$\frac{(1+\theta)(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta-2}}{(u_1 u_2)^{\theta+1}}$
Gumbel	$\frac{C_\theta(u_1, u_2)(\log u_1 \log u_2)^{\theta-1} \left\{ [(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta]^{1/\theta} + \theta - 1 \right\}}{u_1 u_2 [(-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta]^{2-1/\theta}}$
Normale ¹	$\frac{1}{ \mathbf{R} ^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \xi' (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \xi \right)$

Tableau B.3: Espace de paramètre θ pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.

Copule	Espace paramètre
Clayton	$-1 \leq \theta < \infty$
Gumbel	$1 \leq \theta < \infty$
Normale	$-1 < \theta < 1$

Tableau B.4: Tau de Kendall pour les copules : Clayton, Gumbel et normale.

Copule	τ_{C_θ}
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	$\frac{\theta-1}{\theta}$
Normale	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$

Tableau B.5: Générateur pour les copules : Clayton et Gumbel.

Copule	$\varphi(s)$
Clayton	$\frac{s^{-\theta}-1}{\theta}$
Gumbel	$(-\log s)^\theta$

1. où $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))'$ et Φ^{-1} est la fonction de répartition inverse d'une normale $(0, 1)$ et \mathbf{R} est la matrice de corrélation définie par :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Tableau B.6: Fonction de Kendall pour les copules : Clayton et Gumbel.

Copule	$K(s)$
Clayton	$\frac{1}{\theta}[(1 + \theta)s - s^{\theta+1}]$
Gumbel	$s - \frac{s}{\alpha} \log s$

Tableau B.7: Coefficient de dépendance de queue (inférieure et supérieure) pour les copules : Clayton, Gumbel et Normale.

Copule	λ_{Inf}	λ_{Sup}
Clayton	$2^{-1/\theta}$	0
Gumbel	0	$2 - 2^{1/\theta}$
Normale	0	0

APPENDICE C

MÉTHODE DE CHOLESKY

La méthode de Cholesky ne s'applique qu'aux matrices symétriques réelles et définies positives (voir Allaire et Kaber (2002)).

Définition C.1 Soit Σ une matrice réelle symétrique de dimension $n \times n$, c'est-à-dire $\Sigma = \Sigma^T$ ¹. On dit que Σ est définie positive si $x^T \Sigma x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit Σ une matrice symétrique réelle définie positive alors Σ peut s'exprimer par :

$$\Sigma = LDL^T, \quad (\text{C.1})$$

où D est une matrice diagonale et L une matrice triangulaire inférieure. Il vient :

$$\begin{aligned} \Sigma &= LDL^T \\ &= (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T) \\ &= (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L)^T \\ &= BB^T, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où l'on a posé $B = L\sqrt{D}$.

Théorème C.1 (*Décomposition de Cholesky*). Soit Σ une matrice réelle, définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inférieure, telle que

1. Transposé de Σ

tous ses éléments diagonaux soient positifs, et qui vérifie

$$\Sigma = BB^T. \tag{C.3}$$

Preuve. Voir Allaire et Kaber (2002) ■

RÉFÉRENCES

- Adrian, T. et Franzoni, F. (2009). Learning about beta : time-varying factor loadings, expected returns, and the conditional capm. *Journal of Empirical Finance*, 16, 537–556.
- Allaire, G. et Kaber, S. M. (2002). *Algèbre linéaire numérique*. Paris : Ellipses.
- Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J.-P. et Mikosch, T. (2009). *Handbook of financial time series*. Berlin : Springer-Verlag.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- Badescu, A., Elliott, R. J., Kulperger, R., Miettinen, J. et Siu, T. K. (2011). A comparison of pricing kernels for garch option pricing with generalized hyperbolic distributions. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(5), 669–708. <http://dx.doi.org/10.1142/S0219024911006401>
- Badescu, A., Kulperger, R. et Lazar, E. (2008). Option valuation with mixture garch model. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 12(2), article 5.
- Balakrishnan, N. et Lai, C.-D. (2009). *Continuous bivariate distributions.*, volume 2. London ; New York : Springer Science+Business Media,.
- Bernard, C. et Czado, C. (2013). Multivariate option pricing using copula. *Applied Stochastic Model in Business and Industry*, 9, 509–526.
- Black, F. et Scholes, M. (1973). The pricing of option and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–659.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates : a multivariate generalized arch model. *Reveiw of Economics and Statistics*, 498–505.
- Bollerslev, T., Russell, J. R. et Watson, M. W. (2010). *Volatility and time series econometrics : essays in honor of Robert F. Engle*. New York : Oxford University Press.

- Bougerol, P. et Picard, N. (1992). Stationarity of garch processes and some non-negative time series. *Journal of Econometrics*, 52, 115–127.
- Brealey, A. R., Myers, S. C. et Allen, F. (2011). *Principles of corporate finance.*, volume 10. New York : McGraw-Hill/Irwin.
- Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (2002). *Introduction to time series and forecasting, Second Edition*, volume 2. New York : Springer-Verlag.
- Charpentier, A. (2014). Modeling the marginals and the dependence separately. *Université du Québec à Montréal*. Récupéré de <http://freakonometrics.hypotheses.org/>
- Chiou, S. C. et Tsay, R. (2008). A copula-based approach to option pricing and risk assessment. *Journal of Data Science*, 6, 273–301.
- Cougnaud, B. (2007). *L'univers des risques en finance : un équilibre en devenir*. Paris : Press de Sciences Po.
- Dias, A. et Embrechts, P. (2010). Modeling exchange rate dependence dynamics at different time horizons. *Journal of International Money and Finance*, 29, 1687–1705.
- Ding, Z. et Granger, C. W. (1996). Modeling volatility persistence of speculative returns : a new approach. *Journal of Econometrics*, 73, 185–215.
- Duan, J.-C. (1995). The garch option pricing model. *Mathematical Finance*, 5(1), 13–32.
- Embrechts, P., Lindskog, F. et McNeil, A. (2003). *Handbook of heavy tailed distributions in finance modeling dependence with copulas and application to risk management : Modelling dependence with copulas and applications to risk management*. Amsterdam : Elsevier Science B.V.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of u.k inflation. *Econometrica*, 50, 987–1008.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation : a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339–350.
- Engle, R. F. (2009). *Anticipating correlations : a new paradigm for risk management*. Princeton : Princeton University Press.

- Engle, R. F. et Sheppard, K. (2005). Theoretical properties of dynamic conditional correlation multivariate garch. *Working paper, University of California, San Diego*.
- Fengler, M. R., Herwartz, H. et Werner, C. (2012). A dynamic copula approach to recovering the index volatility skew. *Journal of Financial Econometrics*, 10(3), 457–493.
- Franco, C. et Zakoïan, J.-M. (2010). *GARCH models : structure, statistical inference, and financial applications*. Chichester, West Sussex, UK : John Wiley & Sons Ltd.
- Frees, E. W. (2010). Tutorials on multivariate regression using copulas. *School of Business, University of Wisconsin-Madison*. Récupéré de <https://bus.wisc.edu/faculty/edward-frees>
- Haugh, M. (2004). The monte carlo framework and financial applications. *Department of Industrial Engineering & Operations Research, Columbia University*. Récupéré de <http://www.columbia.edu/~mh2078/>
- Hautsch, N. (2012). *Econometrics of financial high-frequency data*. Berlin : Springer-Verlag.
- Joe, H. (1993). Parametric families of multivariate distributions with given margins. *Journal of Multivariate Analysis*, 46, 262–282.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. London ; New York : Chapman & Hall.
- Jondeau, E., Poon, S.-H. et Rockinger, M. (2007). *Financial modeling under non-gaussian distributions*. London : Springer-Verlag.
- Lee, T.-H. et Long, X. (2009). Copula-based multivariate garch model with uncorrelated dependent errors. *Journal of Econometrics*, 150, 207–218.
- Lewellen, J. et Nagel, S. (2006). The conditional capm does not explain asset-pricing anomalies. *Journal of Financial Econometrics*, 82, 289–314.
- Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat : modèles sur une période*. Paris : Springer-Verlag.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to copulas.*, volume 2. New York : Springer Science Business Media, Inc.

- Oh, D. H. et Patton, A. J. (2013). Simulated method of moments estimation for copula-based multivariate models. *Journal of the American Statistical Association* 108 :502, 689–700. <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.2013.785952>
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 42(2), 527–556.
- Patton, A. J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 4–18.
- Patton, A. J. (2013). Copula methods for forecasting multivariate time series. chap 16 of *Handbook of Economic Forecasting 2 PartB*, 899–960. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-62731-5.00016-6>
- R Core Team. (2015). *R : A language and environment for statistical Computing*. Vienna, Austria. Récupéré de <http://www.R-project.org/>
- Rombouts, J., Stentoft, L. et Violante, F. (2014). The value of multivariate model sophistication : an application to pricing dow jones industrial average options. *International Journal of Forecasting*, 30, 78–98.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'institut de statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, volume 3. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.
- van den Goorbergh, R. W. J., Genest, C. et Werker, B. J. M. (2005). Bivariate option pricing using dynamic copula models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37, 101–114.
- Zapatero, F. et Cvitanic, J. (2004). *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*. London ; Cambridge ; Massachusetts : The MIT Press.
- Zhang, J. et Guégan, D. (2008). Pricing bivariate option under garch processes with time-varying copula. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42, 1095–1103.
- Zivot, E. et Wang, J. (2003). *Modeling financial time series with S-Plus*. New York : Springer-Verlag.